物理入門コース

4

電磁気学 II

変動する電磁場

長岡洋介著

岩波書店

物理入門コース　4　**電磁気学 II**

戸田盛和・中嶋貞雄 編

物理入門コース

4

電磁気学 II

変動する電磁場

長岡洋介著

岩波書店

装幀　道吉　剛

目次

7　電磁誘導の法則 · · · · · · · · · · · · · · · · **215**

7–1　ファラデーの発見 · · · · · · · · · · · · · · 216

7–2　運動の相対性 · · · · · · · · · · · · · · · · 220

7–3　運動する回路に生じる起電力 · · · · · · · · 221

7–4　電磁誘導の一般法則 · · · · · · · · · · · · · 225

7–5　自己インダクタンス · · · · · · · · · · · · · 227

7–6　相互インダクタンス · · · · · · · · · · · · · 231

7–7　相互インダクタンスの相反定理 · · · · · · · 236

7–8　静磁場のエネルギー · · · · · · · · · · · · · 237

7–9　振動電流 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 240

7–10　複素インピーダンス · · · · · · · · · · · · 243

8　マクスウェルの方程式と電磁波 · · · · · · **249**

8–1　変動する電流と電荷の保存 · · · · · · · · · 250

8–2　変位電流 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 252

8–3　マクスウェルの方程式 · · · · · · · · · · · 256

8–4　電磁場のエネルギー · · · · · · · · · · · · · 260

8–5 電磁波 · 264
8–6 電磁波の放射と伝播 · · · · · · · · · · · · · · · 273

9 物質中の電場と磁場 · · · · · · · · · · · · · 279

9–1 誘電体 · 280
9–2 分極と電束密度 · · · · · · · · · · · · · · · · 284
9–3 静電場の境界条件 · · · · · · · · · · · · · · · 292
9–4 誘電体があるときの静電場の例 · · · · · · · · 296
9–5 磁性体 · 299
9–6 磁化と磁場の強さ · · · · · · · · · · · · · · · 302
9–7 静磁場の境界条件 · · · · · · · · · · · · · · · 309

10 変動する電磁場と物質 · · · · · · · · · · 313

10–1 物質中のマクスウェルの方程式 · · · · · · · 314
10–2 誘電体中の振動電場 · · · · · · · · · · · · · 316
10–3 誘電体中の電磁波 · · · · · · · · · · · · · · 323
10–4 導体と電磁波 · · · · · · · · · · · · · · · · · 327

さらに勉強するために · · · · · · · · · · · · · 333
問題略解 · 339
索引 · 351

コーヒー・ブレイク

クォーク　5
場　28
空中電気　127
金属電子論　139
加速器　152
地球の磁場　155
ファラデー　*219*
磁気単極はあるか　*257*
空洞放射とフォトン　*270*
原子と光　*276*
超伝導　*301*
磁性と量子論　*306*

（立体の数字は『電磁気学Ⅰ』のページを示す）

電磁気学Ｉ　目次

1　電荷にはたらく力
2　静電場の性質
3　静電場の微分法則
4　導体と静電場
5　定常電流の性質
6　電流と静磁場
問題略解
索引

7

電磁誘導の法則

これまでは，時間的に変動しない電場，磁場の性質を調べてきた．それらが時間変化するときには，新たな事態が生じる．磁場が変化し，回路を貫く磁束が変化すると，回路には電磁誘導によって起電力が生じる．同じことは回路のない空間にも起こる．すなわち，磁場が変化すると，そのまわりに電場が生じるのである．かくして，電場の基礎方程式に磁場の時間変化の項がつけ加わり，電場と磁場は関連しあうことになる．

7-1 ファラデーの発見

私たちは，磁場中を運動する電荷に力がはたらき，運動する電荷はそのまわりに磁場をつくり出して，磁石に力を及ぼすことを知った．これらの事実は，電気現象と磁気現象が互いに密接に関連したものであることを示す．そのことをさらに確かにしたのは，ファラデーによる電磁誘導の発見(1831年)である．

ファラデーは電荷による力が導体表面に電荷を誘起することを発見し，さらにそのことから類推して，1つの回路に流れる電流が，その近くにおかれた第2の回路に電流を誘起するのではないかと考えた．しかし，図7-1のように2つの回路を並べ，スイッチを閉じて第1の回路に定常電流を流しても，第2の回路に電流は流れない．ファラデーは，スイッチを入れたり切ったりする瞬間にだけ，検流計の針が振れるのを発見したのである．

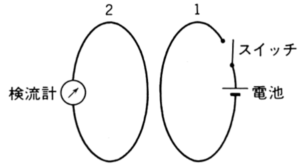


図7-1 ファラデーの発見．1の回路のスイッチを入れたり切ったりするとき，2の回路に電流が流れる．

このファラデーの発見は，第1の回路に流れる電流によって第2の回路の付近につくられている磁場が時間的に変動するときにだけ，第2の回路に電流を流す力が生じることを示している．回路に電池をつないだのと同じ働き，起電力が生じたのである．同じ現象は，図7-2のように回路に磁石を近づけたり，遠ざけたりしたときにも生じる．これらの現象を**電磁誘導**(electromagnetic

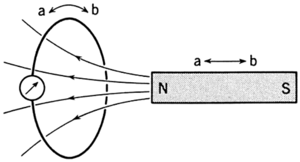


図7-2 磁石を回路に近づけたり(a)，遠ざけたり(b)すると，電流が流れる．

induction)という．

いま，面積 S の平面状の回路に，一様な磁場が垂直にかかっている場合を考える．このとき，磁束密度 B に回路の面積 S をかけた

$$\Phi = BS \tag{7.1}$$

を，この回路を貫く**磁束**(magnetic flux)と呼ぶ．磁束の符号は，回路に向きを決めておいて，その向きに回転する右ネジが進む向きを正，逆向きを負と約束しよう．実験によると，磁場が時間変化するとき回路に生じる起電力 ϕ_{em} は回路を貫く磁束の時間変化 $d\Phi/dt$ に比例し，向きはその起電力によって回路に流れる電流のつくる磁場が磁束の時間変化を打ち消す向きになる．上のような回路の向きと磁束の符号の約束によれば，式では

$$\phi_{\mathrm{em}} = -k\frac{d\Phi}{dt} \qquad (k>0) \tag{7.2}$$

となる．たとえば図 7-2 の場合であれば，磁石を近づけるときは磁束が増加するから a の向きに，磁石を遠ざけるときは磁束が減少するから b の向きになる．(7.2)の法則は，磁束の変化が第 1 の回路に生じた電流の変化による場合にも，あるいは磁石の運動による場合にも，そうした磁束の変化の原因によらず成り立つ．したがって，起電力をつくり出しているものは，電流の変化や磁石の運動ではなくて，回路のある場所での磁束の変化そのものであると見なければならない．

回路が平面でなく，磁束密度が場所による一般の場合には，回路を貫く磁束はつぎのように定義すればよい．回路を縁にした曲面 S を考え，回路に向きを決めておいて，その向きに回転する右ネジの進む側を曲面の表と定義する．曲面に裏から表へ向けて引いた法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ とすれば，

$$\boxed{\Phi = \int_S \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}dS} \tag{7.3}$$

がその回路を貫く磁束である．上で考えた平面状の回路の場合には，曲面として回路を縁にした平面を選ぶと，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})=B$ で，積分は回路の面積を与えるから，この定義が(7.1)式に一致することは明らかであろう．

回路を縁にした曲面 S といっても，そのつくり方には無限の可能性がある．しかし，(7.3)式の磁束の定義によると，磁束の大きさは曲面 S の選び方によらないことがわかる．いま，図7-3のように異なる2つの曲面 S_1, S_2 を選び，そのおのおのについて(7.3)の面積分をつくったとしよう．すなわち，S_1, S_2 の法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r})$ として，

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{r})\}dS, \qquad \Phi_2 = \int_{S_2} \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r})\}dS \qquad (7.4)$$

とする．この2つの曲面を合わせると，それは1つの閉じた曲面になる．そこでこの閉曲面 S に磁束密度に対するガウスの法則(6.31)を適用すると，

$$\int_S \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}dS = 0 \qquad (7.5)$$

が成り立つ．この面積分を S_1 の上の積分と S_2 の上の積分とに分けることを考える．そのとき，法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ の向きに注意しなければならない．ガウスの法則(7.5)では，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ は閉曲面の内から外へ向けてとられている．一方(7.4)の積分では，(7.3)式で定義したように曲面の裏から表に向けてとられる．したがって，図のように曲面 S_2 上では $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r})$ となり，積分の符号は逆転する．すなわち，

$$\int_{S_1+S_2} \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}dS = \int_{S_1} \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{r})\}dS - \int_{S_2} \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r})\}dS$$
$$= \Phi_1 - \Phi_2$$

したがって，ガウスの法則(7.5)により

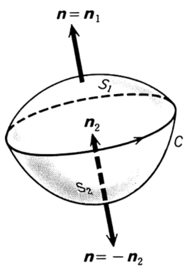


図7-3　回路 C を縁にした2つの曲面 S_1, S_2 をとる．

Coffee Break

ファラデー(M. Faraday)

電磁気学の歴史の中で，電磁誘導など多くの現象の発見者として，また近接作用の考え方の提唱者として，ファラデーの存在は大きい．

ファラデーは，1791年イギリスのロンドンの郊外で鍛冶屋の子として生まれた．家が貧しかったため製本屋で働いたが，製本する本を読んで勉強し，化学と電気がとくに好きになった．そのうちに，王立研究所の教授のデイヴィーが化学の公開講義を行なうことを知り，それに出席した．この講義で化学に興味をもったファラデーは，デイヴィーに頼みこんで，その助手として実験の手伝いをするようになった．こうしてファラデーの化学と電気の研究が始まったが，彼は1816年の生石灰の研究を振り出しに，1823年塩素の液化，1825年ベンゼンの発見，1831年電磁誘導の発見，1833年電気分解の法則と，つぎつぎに優れた業績をあげていった．彼はデイヴィーの助手から王立研究所の教授になり，晩年引退するまでそこで研究を続けた．1867年没した．

このように正規の教育を受けていないファラデーは，研究に数学を全く使わなかった．すぐれた直観力と天才的な実験技術とによって，今日から見れば全く単純な装置により，みごとな成功を収めたのである．彼の素朴な直観は，電荷の間にはたらく力が空間を隔てて及ぼしあうという考え方に納得せず，ゴムひものようなものが電荷と電荷を結んでいると考えた．彼にとって，‘ゴムひも’すなわち電場は電荷にはたらく力を考える上での単なる便宜上の存在ではなく，実在そのものであった．

しかし，ファラデーの主張に基づく実在としての電磁場の基礎法則が確立するためには，マクスウェルの数学の素養が必要であった．

$$\Phi_1 = \Phi_2 \tag{7.6}$$

となる．(7.3)式のように定義した磁束は，曲面の選び方によらず，その大きさは一義的に定まることがわかる．

磁束密度が時間的に変動するとこの磁束が変化し，回路に(7.2)式の誘導起電力が生じるのである．

7-2 運動の相対性

図7-2の実験で磁石を動かすかわりに，磁石を固定して回路を動かしたらどうなるだろうか．この場合にも，回路を貫く磁束が時間変化する．実験によると，このときも回路には起電力が生じ，その大きさは(7.2)式と同じになる．

磁石が動いている場合，磁石と一緒に動いている観測者から見ると，磁石は静止し，かわりに回路が動いているように見える．回路に電流が流れる現象が，観測者が動いているか静止しているかによって異なることはない．したがって，磁石と一緒に動く観測者には，磁場中を動く回路に起電力が生じるという現象が見え，その起電力の大きさは磁場の方が時間的に変化する場合と同じく，(7.2)式で与えられる．

私たちは，ニュートン力学の法則が，相互に等速運動をしている観測者(座標系)に対して，同じように成り立つことを知っている．ふたりの観測者A, Bが相対的に運動しているとき，Aから見ればBが動いているように見え，Bから見ればAが動いているように見える．しかし，ふたりの観測者にはどちらにも，静止しているのは自分の方だと主張する根拠はない．このことは，力学法則に限らずすべての自然法則について成り立つことではなかろうか．相互に等速運動をしている観測者はすべて自然法則の前に平等であり，これらの観測者に対して自然法則は同じ形にいい表わされなければならないと考えるのは，きわめて自然である．この要請を**相対性の原理**(principle of relativity)と呼ぶ．

このような見方からすれば，磁石と回路の問題では磁石が動いているか，回路が動いているかは，観測者の立場により変わるものであって，重要でない．

現象を決めているのは，磁石と回路との相対的な運動である．自然法則の相対性から見るなら，磁石が動くときにも回路が動くときにも，回路内に同じ起電力(7.2)が生じることは，当然予想されることといえる．

7-3　運動する回路に生じる起電力

そこで，静磁場の中を運動する回路に生じる起電力について，考察をすすめることにしよう．

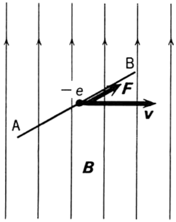


図 7-4　一様な磁場中を導線を動かすと，導線内の電子にローレンツ力がはたらく．

図 7-4 のように，一様な静磁場の中に導線 AB を磁場に垂直にまっすぐに張り，磁場および導線の向きに垂直に動かしたとする．このとき，導線の中ではなにが起こるだろうか．導線の中の電子は導線とともに磁場中を動くから，電子に対してはローレンツの力がはたらくことになる．磁束密度を $\boldsymbol{B}$，導線の動く速度を $\boldsymbol{v}$ とすれば，電子の電荷は $-e$ だから，その力は

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{7.7}$$

である．図 7-4 の場合には，力の大きさは evB で，向きは導線に沿っている．この力によって電子が動き電流が流れ出すが，導線に端があれば電流はいつまでも流れ続けることはできない．導線の両端に正負の電荷がたまり，それによる電場からの力がローレンツの力とつりあい，平衡状態に達してしまう．

導線を閉じさせて，回路にしたらどうなるだろうか．図 7-5 のように，長方形の回路 ABCD を一様な磁場中におき，磁場に垂直に動かしたとしよう．このときにも，導線 AB, CD 上にある電子には導線に沿う向きにローレンツ力が

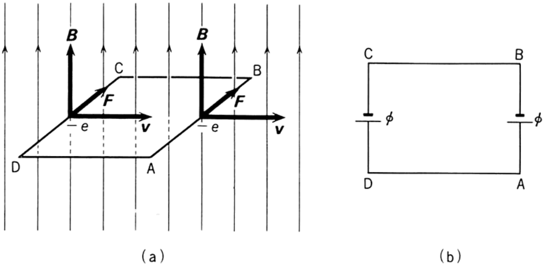


図 7-5　一様な磁場中を長方形の回路を動かすと，導線中の電子にローレンツ力がはたらくが，電流は流れない．

はたらくが，回路を回る電流は流れない．なぜなら，電子にはたらく力を回路に沿ってみると，AB 上と CD 上とで大きさが等しく向きが逆になる．これは図(b)のように辺 AB と CD に同じ強さの電池を逆向きに挿入したようなもので，電子を流す力にはならない．回路には BC 上に負，AD 上に正の電荷が生じ，その電荷による電場の力とローレンツの力がつりあって，平衡状態になる．

しかし，磁場が一様でないときにはこうはならない．たとえば，磁場が AB 上で CD 上よりも強ければ，電子にはたらくローレンツの力も AB 上で CD 上より強くなる．磁束密度が辺 AB, CD の向きには一定で，辺 BC, AD の向きにのみ空間変化しているとしよう．図 7-6 のように，磁束密度の大きさを AB 上で B_1，CD 上で B_2 とする．回路の動く速さを v とすれば，ローレンツの力は各辺の上でそれぞれ，$F_1=evB_1$，$F_2=evB_2$ になる．辺 AB(CD) の長さを a と

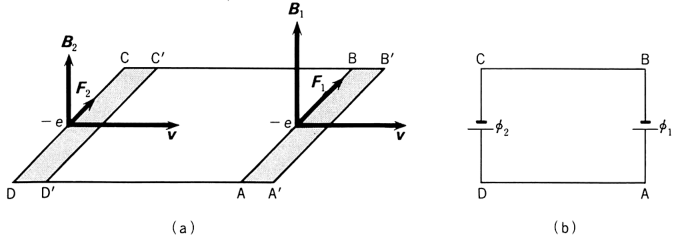


図 7-6　一様でない磁場中を回路を動かすと，回路に起電力が生じる．

すると，この電子にはたらく力は，AB 間に $\phi_1=vB_1a$，DC 間に $\phi_2=vB_2a$ の電位差が生じた場合に相当している．静電場とは異なる力で電子が動かされるわけで，図(b)のように辺 AB, CD 間にそれぞれ起電力 ϕ_1, ϕ_2 の電池を挿入したことと同じである．回路に電流を流す起電力は，ABCDA の向きに

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{em}} &= -\phi_1+\phi_2\\ &= -(B_1-B_2)av\end{aligned} \tag{7.8}$$

となる．

(7.8)式の右辺はこの回路を貫く磁束の時間変化で表わされる．短い時間 Δt の間に，回路の位置は図 7-6 のように ABCD から A′B′C′D′ に変わる．$\overline{\mathrm{AA'}}$ $(=\overline{\mathrm{DD'}})$ の長さは $v\Delta t$ である．このとき，回路を下から上へ貫く磁束は ABB′A′ を貫く分だけ増加し，DCC′D′ を貫く分だけ減少する．前者は $B_1av\Delta t$，後者は $B_2av\Delta t$ だから，回路を貫く磁束の変化 $\Delta\Phi$ は

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= B_1av\Delta t-B_2av\Delta t\\ &= (B_1-B_2)av\Delta t\end{aligned}$$

したがって，(7.8)式の右辺は $-\Delta\Phi/\Delta t$ に等しい．$\Delta t\to 0$ の極限を考えるとこれは時間 t による微分になり，

$$\boxed{\phi_{\mathrm{em}} = -\frac{d\Phi}{dt}} \tag{7.9}$$

の関係が得られる．

私たちは，(7.9)式を特別の場合について導いたが，この法則は一般的に成り立つ．また前節で見たように，回路が動く場合だけでなく，磁場の方が時間変化する場合にも成り立たなければならない．すなわち，電磁誘導の法則(7.2)において，係数は $k=1$ となることが結論される．

例題 1 図 7-7 のように，一様な静磁場中で回路を磁場に垂直な軸のまわりで一定の角速度で回転させたとき，回路に生じる起電力を求めよ．

［解］ 磁束密度を B，回路の面積を S，回路の面と磁場の向きとのなす角を θ とすれば，回路を貫く磁束は

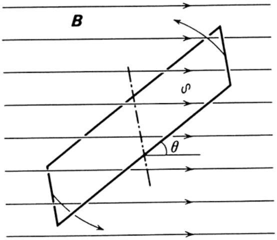


図 7-7　一様な磁場の中で回路を回転させる．

$$\Phi = BS\sin\theta$$

となる．回路の回転の角速度を ω，時刻 $t=0$ における θ を θ_0 とすれば，$\theta=\omega t+\theta_0$ となるから，

$$\Phi(t) = BS\sin(\omega t+\theta_0)$$

したがって，回路に生じる起電力は

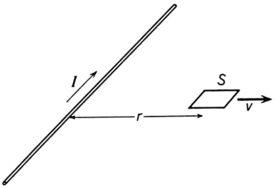
$$\phi_{\text{em}}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$
$$= -BS\omega\cos(\omega t+\theta_0)$$

となる．回路には時間的に振動する起電力が生じる．これが交流発電機の原理である．▌

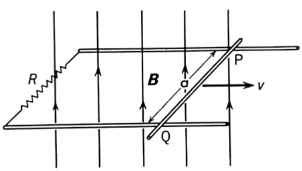
問　　題

1. 直径 10 cm，2000 回巻きのコイルを，地球磁場の中で 1 秒に 15 回の速さで回転させたとき，コイル内に生じる最大の起電力を求めよ．ただし，地球磁場を 5×10^{-5} T とする．

2. まっすぐに張った導線に強さ I の定常電流を流す．導線を含む面内に面積 S の小



問題 2



問題 3

さなひと巻きのコイルをおき，一定の速さ v で導線から遠ざける(図)．導線からコイルの中心までの距離が r のとき，コイルに生じる起電力を求めよ．

3. 図のように，1 辺に抵抗 R をつないだ U 字型の導体棒に，もう 1 本の導体棒を P, Q 点で接触させて閉じた回路をつくる．回路を回路面に垂直な一様な磁場(磁束密度 B)の中におき，導体棒を棒に垂直な向きに速さ v で滑らせる．棒の PQ 間の長さを a とする．このとき，

(1)　回路に流れる電流，単位時間に抵抗 R に発生するジュール熱を求めよ．R 以外の導体棒の抵抗は無視できるとする．

(2)　導体棒にはたらく力と，棒を動かすとき単位時間に行なう仕事を求め，仕事が(1)で求めた抵抗で消費されるエネルギーに等しいことを示せ．

7-4　電磁誘導の一般法則

磁場が時間的に変化したとき，そこにおいた回路には(7.9)式のような起電力が生じる．起電力とは，導線中に生じた電場を回路に沿ってひと回り積分したものにほかならない．それを一般の形をした回路について表わすと，回路上の 1 点 $\boldsymbol{r}$ において回路に沿う単位ベクトル(接線ベクトル)を $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$ として，

$$\phi_{\mathrm{em}} = \int_C \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds \tag{7.10}$$

となる．磁場が時間的に変化すると，一般にそれによって生じる電場も時間的に変化する．そこで，電場を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ と書いて，それが時間 t に依存することを示した．

法則(7.9)では，このような電場は導線の上にのみ生じるように見ている．しかし，近接作用の立場からは，電場は回路の有無にかかわらず，真空中に生じているものと見るべきであろう．回路をおくのは，その電場を測定する手段に過ぎない．

このように考えると，(7.10)の積分において C は導線でつくられた閉じた回路を表わすのではなく，真空中に任意に選んだ閉じた経路を表わすものとしてよい．そして，電磁誘導の法則は任意の閉じた経路 C について，

$$\boxed{\int_C \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds = -\frac{d\Phi(t)}{dt}} \tag{7.11}$$

となる．ここで，Φ は経路 C を貫く磁束で，(7.3)式によって与えられる．磁束密度が時間に依存することをあらわに示すと

$$\Phi(t) = \int_S \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\,dS \tag{7.12}$$

となる．静電場では渦なしの法則が成り立ち，(7.11)式の左辺の線積分はつねに 0 であった．磁場が時間変化すると，その法則はこのように書き直されなければならない．

静電場の場合，積分形の渦なしの法則

$$\int_C \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds = 0 \tag{7.13}$$

は，微分形の法則

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7.14}$$

に書き換えられた．これと同じように，電磁誘導の法則(7.11)も微分形に直すことができる．そのためには，3-3 節の議論と同じように，(7.11)式を適用する閉じた経路として点 $\boldsymbol{r}_0$ に微小な平面状の経路(図 3-7)を選ぶ．経路が囲む面積を ΔS，その面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば，(7.11)式の左辺の線積分は

$$\int_C \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds = [\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0}\cdot\boldsymbol{n}\Delta S$$

となる((3.19)式)．磁束密度はこの微小な面内では一定と見なしてよいから，経路を貫く磁束は

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \int_S \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\,dS \\ &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0,t)\cdot\boldsymbol{n}\Delta S\end{aligned}$$

したがって，この微小な経路について電磁誘導の法則は，

$$[\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0}\cdot\boldsymbol{n}\Delta S = -\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0,t)}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\Delta S$$

と書かれる．この関係が経路の位置 $\boldsymbol{r}_0$，向き $\boldsymbol{n}$ によらず成り立つことから，

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{7.15}$$

が導かれる．これが微分形に書かれたファラデーの電磁誘導の法則である．このように書くことによって，電磁誘導の現象も，空間の各点で生じた磁場の時間変化がその点に電場を生じさせるという，近接作用の立場による法則として表わされたことになる．

問　　題

1. 長いソレノイドに流す電流を一定の割合いで大きくすると，その電流によってソレノイドの内部に生じている一様な磁場も，一定の割合いで強くなる．このとき，電磁誘導の法則(7.11)，(7.15)の右辺は時間によらない一定値になり，式は定常電流によって生じる静磁場を与えるアンペールの法則(6.37)，(6.38)と同じ形になる．このことを用い，ソレノイドの電流を一定の割合いで変化させたときに生じる電場を求めよ．

7-5 自己インダクタンス

閉じた回路に電流を流すとまわりに磁場が生じるが，その電流による磁束は自分自身の回路も貫いている．生じる磁場は電流に比例するから，その磁束 Φ も電流 I に比例し，比例係数を L として

$$\Phi = LI \tag{7.16}$$

と表わされる．

電流が時間的に変動すると，磁束も変化する．しかし，電流の変化があまり速くなければ，磁場は各瞬間に流れている電流 $I(t)$ によって生じる静磁場と同じになると考えてよいであろう．このように見なしてよい場合，その時間変化する電流を**準定常電流**(quasi-stationary current)と呼ぶ．電流の変化が速いときは，このような取り扱いは許されない．変化する電流を準定常電流と見なしうるための条件は，8-2 節で検討する．

時間変化する電流 $I(t)$ が準定常電流と見なされるときは，それによって生じ

る磁束についても

$$\Phi(t) = LI(t) \tag{7.17}$$

の関係が成り立つ．このように磁束が時間変化すると，電磁誘導による起電力が，その電流の流れる回路にも生じることになる．その大きさは

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{em}} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -L\frac{dI}{dt}\end{aligned} \tag{7.18}$$

となる．起電力は，電流が増えるときは減らす向きに，減るときには増やす向きにはたらく．この現象を**自己誘導**(self-induction)という．係数Lはその回路の形によって決まるもので，**自己インダクタンス**(self-inductance)または**自己誘導係数**という．

MKSA 単位系では，電流の単位をアンペア(A)，起電力の単位をボルト(V)としたとき，インダクタンスの単位をヘンリー(H)とする．すなわち

$$\boxed{1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{V \cdot s \cdot A^{-1}}} \tag{7.19}$$

である．

例題1　単位長さ当りの巻き数n，長さl，断面積Sのコイル(図7-8)の自己インダクタンスを求めよ．

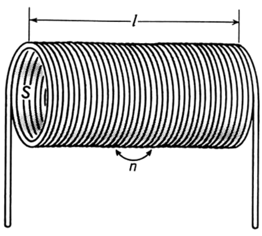


図7-8　単位長さ当りの巻き数n，長さl，断面積Sのコイル．

［解］　コイルに電流Iを流したとき，コイルの内部に生じる磁束密度は，6-9節の例題2で求めたように((6.41)式)，

$$B = \mu_0 nI$$

となる．コイルのひと巻きを貫く磁束は BS，コイルの総巻き数は nl だから，コイル全体を貫く磁束は

$$\begin{aligned}\Phi &= nlBS \\ &= \mu_0 n^2 lSI\end{aligned}$$

したがって，自己インダクタンス L は(7.16)の定義により，

$$L = \mu_0 n^2 lS \tag{7.20}$$

と得られる．▌

例題2　自己インダクタンス L，抵抗 R の回路に起電力 ϕ の電池をつなぐ．スイッチを入れたとき，流れる電流はどのように時間変化するか．

［解］　この回路は，図7-9のようにコイルと抵抗と電池を直列につないだものと見ることができる．時刻 t に回路に流れる電流を $I(t)$ とすると，コイルには $-L(dI/dt)$ の誘導起電力が生じるから，抵抗には $\phi-L(dI/dt)$ の電位差がかかることになる．したがって，オームの法則(5.5)により，

$$RI(t) = \phi - L\frac{dI(t)}{dt}$$

すなわち，電流に対して

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = \phi \tag{1}$$

の微分方程式が成り立つ．スイッチを入れた時刻を $t=0$ とすれば，この方程式を初期条件

$$I(0) = 0 \tag{2}$$

のもとで解けばよい．いま

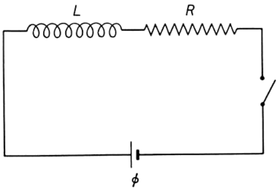


図7-9　自己インダクタンス L と抵抗 R の回路．

$$I(t) = I_\infty + I'(t), \qquad I_\infty = \frac{\phi}{R} \tag{3}$$

とおけば，(1), (2)は

$$L\frac{dI'(t)}{dt} + RI'(t) = 0 \tag{4}$$

$$I'(0) = -I_\infty \tag{5}$$

となる．(4)の解は c を定数として

$$I'(t) = ce^{-(R/L)t}$$

となる．初期条件(5)により $I'(0)=c=-I_\infty$ となるので，電流は

$$I(t) = \frac{\phi}{R}(1-e^{-(R/L)t}) \tag{6}$$

と得られる．電流の時間変化は図 7-10 のようになる．I_∞ はこの回路に流れる定常電流の値であるが，スイッチを入れても電流はすぐにこの値にはならず，ほぼ L/R の時間で徐々にこの値に近づくことがわかる．▌

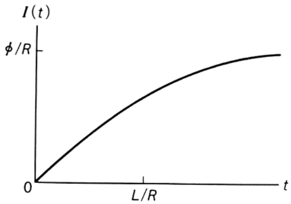
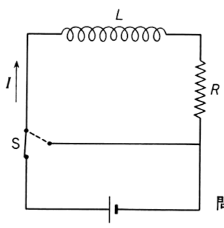


図 7-10　図 7-9 の回路にスイッチを入れたときの電流の時間変化.

問　　題

1. 直径 5 cm，長さ 20 cm，2000 回巻きのソレノイドの自己インダクタンスは何ヘンリーか.

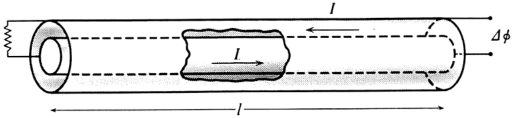
2. 図のように，インダクタンス L のコイルと抵抗 R を直列にして電池につなぎ，強さ I の定常電流を流す．ある瞬間スイッチ S を図の点線の位置にきりかえて，回路から電池をはずしコイルと抵抗だけの閉じた回路にする．スイッチをきりかえてからのちのコイルに流れる電流



問題 2

の時間変化を求めよ.

3. 図のように，断面の半径がそれぞれ a_1, a_2 の長い導体の円筒を軸を一致させておく．一方の端では 2 つの円筒を抵抗で接続し，他方の端で円筒間に電源をつなぐ.



問題 3

(1) このようにして，2 つの円筒に同じ強さの電流 I を逆向きに流したとき，生じる磁場を求めよ.

(2) この回路の自己インダクタンスを求めよ．ただし，円筒の長さを l とする

7-6 相互インダクタンス

つぎに，図 7-1 のように 2 つの回路 1, 2 を並べた電磁誘導の実験を考えてみよう．回路 1 に電流 I_1 を流すと，そのまわりには I_1 に比例した磁場が生じ，回路 2 を貫く磁束 Φ_2 も I_1 に比例する．すなわち，比例係数を L_{21} と書いて

$$\Phi_2 = L_{21}I_1 \tag{7.21}$$

となる．逆に，回路 2 に電流 I_2 を流すと，回路 1 にはそれに比例した磁束 Φ_1 が生じ，

$$\Phi_1 = L_{12}I_2 \tag{7.22}$$

となる．電流が時間変化すると磁束も時間変化する．前節で述べたように，その変化があまり速くなくて電流を準定常電流と見なしうるときには，(7.21), (7.22)式は各時刻で成り立つと考えてよい．したがって，回路 1 に時間変化する電流 I_1 が流れるとき，回路 2 に生じる誘導起電力は

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{em}2} &= -\frac{d\Phi_2}{dt} \\ &= -L_{21}\frac{dI_1}{dt}\end{aligned} \tag{7.23}$$

となる．逆に，回路 2 の時間変化する電流 I_2 が回路 1 に生じさせる誘導起電力

は

$$\phi_{\mathrm{em}\,1} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt} \tag{7.24}$$

となる．係数 L_{21}, L_{12} を**相互インダクタンス**(mutual inductance)または**相互誘導係数**という．

L_{21}, L_{12} の大きさは回路の形や大きさ，相互の位置関係で決まる．じつは，この2つの係数の間には，

$$\boxed{L_{12} = L_{21}\,(\equiv M)} \tag{7.25}$$

の関係が一般的に成り立つ．この関係を相互インダクタンスの**相反定理**という．これに似た関係は電気容量の係数についても成り立っていた((4.23)式)．2つの回路が幾何学的に対称であれば，こうなることは自明であろう．しかし，(7.25)式は回路の形の対称性とは無関係に成り立つものであって，決して自明な関係ではない．その証明は次節で与える．

例題1 それぞれ単位長さ当りの巻き数 n_1, n_2，長さ l_1, l_2，断面積 S_1, S_2 の2つのコイル1,2が，図7-11のように重ねてある．コイル1,2の相互インダクタンスを求めよ．

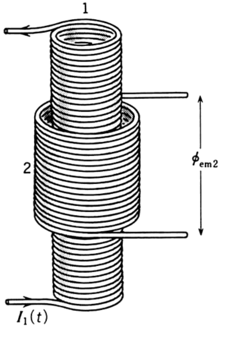


図7-11 2つのコイルを重ねたときの相互インダクタンス．

［解］ コイル1に電流 I_1 を流したとき，コイルの内部に生じる磁束密度は，(6.41)式により

$$B = \mu_0 n_1 I_1$$

となる．このときコイル２を貫く磁束は，コイルひと巻き当り BS_1 である．コイル２の総巻き数は $n_2 l_2$ だから，コイル２を貫く全磁束は

$$\Phi_2 = n_2 l_2 B S_1 = \mu_0 n_1 n_2 l_2 S_1 I_1$$

したがって，相互インダクタンス M は(7.21)の定義により

$$M = \mu_0 n_1 n_2 l_2 S_1 \tag{7.26}$$

となる．▌

上の計算では $l_1 \gg l_2$ として，コイル１の内部に生じる磁束はもれなくコイル２を貫くとしている．相互インダクタンスを求めるには，コイル２に電流を流したときコイル１を貫く磁束を計算してもよい．しかしそう考えると，コイルの端での磁束密度の振舞いに注意しなければならない．その結果が一般的な関係(7.25)が要請するように，上の値と等しくなることは決して自明ではない．

例題２ ２つの回路１,２がある．回路１の自己インダクタンスを L，相互インダクタンスを M とする．回路１に変動する電位差 $\phi_1(t)$ をかけて電流を流したとき，回路２に生じる起電力を求めよ．ただし，コイルの抵抗は無視できるものとする．

［解］ 回路１に流れる電流を $I_1(t)$ とする．回路に電流を流すには，電流の時間変化によって生じる自己誘導起電力に見合うだけの電位差を，外からかけてやらなければならない．すなわち

$$\phi_1(t) = L\frac{dI_1(t)}{dt}$$

一方，回路２に生じる起電力は

$$\phi_{\mathrm{em}2}(t) = -M\frac{dI_1(t)}{dt}$$

となるので，上の関係を用いて

$$\phi_{\mathrm{em}2}(t) = -\frac{M}{L}\phi_1(t)$$

となる．回路２に生じる起電力は，回路１にかけた電位差の M/L 倍になる．とくに回路が上の例題１で扱ったコイルの場合には，２つのコイルの長さを同

じにすれば

$$L=\mu_0 n_1{}^2 lS, \qquad M=\mu_0 n_1 n_2 lS$$

となるので，

$$\phi_{\mathrm{em}2}(t)=-\frac{n_2}{n_1}\phi_1(t)$$

となる．コイルの巻き数を変えることにより，第2のコイルに得られる起電力を大きくすることも，小さくすることもできる．これが変圧器の原理である．▌

例題3　図7-12のように，半径がそれぞれa_1, a_2の円形の回路が，中心を一致させて同一平面上におかれている．$a_1 \gg a_2$のとき，相互インダクタンスL_{12}, L_{21}を定義にしたがってそれぞれ計算し，$L_{12}=L_{21}$が成り立つことを示せ．

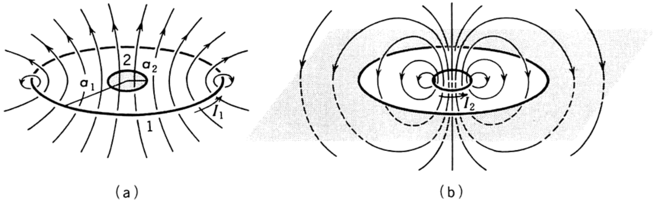


図7-12　同一平面上におかれた2つの円形回路．
(a) 回路1の電流I_1は，回路2の内部にほぼ一様な磁場をつくる．
(b) 回路2の電流I_2は，回路1の外部に磁気双極子の磁場をつくる．

［解］　円形の回路に流れる電流がその中心軸上につくる磁場は，6-4節の例題2で求めた．(6.18)式で$r=0$とおくと，円の中心における磁場が得られる．この結果を用い，回路1に電流I_1が流れているとき，その中心に生じる磁場は

$$B=\frac{\mu_0}{2a_1}I_1$$

と得られる．この中心に回路2がおかれているが，それが十分小さければ，回路の内部で磁束密度はほぼ一定と見てよい．したがって，回路2を貫く磁束は

$$\Phi_2 \cong \pi a_2{}^2 B=\frac{\pi\mu_0 a_2{}^2}{2a_1}I_1$$

となり，相互インダクタンスは

$$L_{21}=\frac{\pi\mu_0 {a_2}^2}{2a_1} \tag{1}$$

と得られる．

L_{12}を計算するには，回路2に電流I_2を流したとき回路1を貫く磁束Φ_1を求めなければならない．(7.3)式によって磁束の計算をするとき，積分する曲面を回路1を縁にした内側の平面にとると，回路2の近くに生じる磁場の表式を正しく求めることが必要になる．それは初等関数では表わされないので，計算は易しくない．そこで，曲面の形は自由に選べることを利用して，曲面を思いきって広げ，回路1を縁にして外側に広がる平面と，それを十分遠方で閉じさせる半球面とに選ぶ．こうすると，半球面上の積分は0になるとしてよい．なぜなら，閉じた回路に流れる電流が遠方につくる磁場は磁気双極子による磁場と同じで距離の3乗に反比例するから，球面上の磁場は半球面の半径をRとするとR^{-3}に比例する．一方半球面の面積はR^2に比例するから，半球面上の積分は$R^{-3}\cdot R^2=R^{-1}$に比例し，球面を無限遠方にとると消えることがわかる．したがって，Φ_1を計算するには回路1を縁にして外側に広がる平面上で積分を行なえばよいことになる．

回路2に電流I_2が流れているとき，それが遠方につくる磁場は，6-7節の例題1で求めたように，磁気双極子のつくる磁場(6.24)式で与えられる．とくに，面に垂直なベクトル$\boldsymbol{n}$の方向をz軸にとると，$n_x=n_y=0$，$n_z=1$となり，xy面内の点における磁場は，$S=\pi {a_2}^2$とおいて

$$B_z(\boldsymbol{r})=-\frac{\mu_0 {a_2}^2 I_2}{4r^3}, \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

となる．これを$r>a_1$の領域で積分をして，磁束は

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -\int_{a_1}^{\infty} B_z(\boldsymbol{r})\cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi\mu_0 {a_2}^2 I_2}{2}\int_{a_1}^{\infty}\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\pi\mu_0 {a_2}^2}{2a_1} I_2\end{aligned}$$

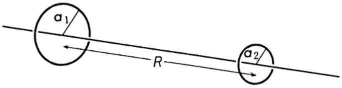
と得られる．したがって相互インダクタンス L_{12} は

$$L_{12} = \frac{\pi\mu_0 {a_2}^2}{2a_1} \tag{2}$$

となる．(1)の結果と比較し，この場合たしかに $L_{12}=L_{21}$ の関係が成り立っていることがわかる．▌

問　題

1. 図のように，半径がそれぞれ a_1, a_2 の2つの円形コイルを，軸を一致させて平行におく．コイルの間の距離 R が a_1, a_2 より十分大きいとき，2つのコイルの相互インダクタンスを求めよ．



問題 1

7-7 相互インダクタンスの相反定理

相互インダクタンスの間に(7.25)の関係があることを一般的に証明するには，つぎのようにベクトル・ポテンシャルを用いればよい．

回路1に流れる電流 I_1 によってつくられる磁場は，(6.47), (6.56)式により，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を使って

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int_{C_1}\frac{\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}ds' \tag{7.27}$$

と表わされる．$\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{r})$ は回路1に沿った接線ベクトル，積分は回路1に沿って一巡する線積分を表わす．回路2を貫く磁束は，(7.3)式により

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \int_{S_2}\{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r})\}dS \\ &= \int_{S}\{\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\}\cdot\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r})dS\end{aligned}$$

となる．積分は，回路 2 を縁にした曲面 S_2 上の面積分である．ストークスの定理(3.21)を使うと，ベクトルの回転を曲面上で積分したものは，曲面の縁をひと回りする線積分に書き換えることができた．すなわち，

$$\int_{S_2} \{\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\}\cdot\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r})dS = \int_{C_2} \{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{r})\}ds$$

右辺で $\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{r})$ は回路 2 に沿った接線ベクトル，積分は回路 2 に沿って一巡する線積分を表わす．$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に(7.27)式を代入して，

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int_{C_2}\int_{C_1}\frac{\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}ds'ds$$

が得られる．したがって，相互インダクタンスは

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{C_2}\int_{C_1}\frac{\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}ds'ds \tag{7.28}$$

となる．

つぎに，回路 2 に電流 I_2 を流したとき回路 1 を貫く磁束 Φ_1 を上と同じように計算して L_{12} を求めると，その結果が(7.28)式で $\boldsymbol{t}_1$ と $\boldsymbol{t}_2$，C_1 と C_2 を入れ換えたものになることは明らかであろう．この式の形からわかるように，入れ換えても結果は変わらない．すなわち，一般に(7.25)の関係が成り立つことになる．

7-8　静磁場のエネルギー

はじめ電流の流れていないコイルに，外から徐々に電位差をかけ電流を流す場合を考えてみよう．電流 $I(t)$ は時刻 $t=0$ に $I(0)=0$，時刻 $t=t_1$ に $I(t_1)=I$ になったとする．この間，電流が増加するので，コイルには電流の増加を妨げる向きに自己誘導起電力が生じる．電流を流すには，それに抗して外から電位差をかけなければならない．コイルの電気抵抗は無視できるものとすれば，外からかけるべき電位差 $\phi(t)$ は

$$\phi(t) = L\frac{dI(t)}{dt}$$

となる．この電位差のもとで，短い時間 Δt の間に $I(t)\Delta t$ の電荷が移動するから，この間に外から

$$\Delta W = \phi(t)\cdot I(t)\Delta t$$

だけの電気的な仕事がなされる．したがって，時刻 0 から t_1 までの間になされる仕事は

$$W = \int_0^{t_1}\phi(t)I(t)dt$$

$$= L\int_0^{t_1}\frac{dI(t)}{dt}I(t)dt$$

となる．この被積分関数は

$$\frac{dI(t)}{dt}I(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{I(t)^2\}$$

と書くことができるから，積分は

$$W = \frac{L}{2}\int_0^{t_1}\frac{d}{dt}\{I(t)\}^2dt$$

$$= \frac{L}{2}[I(t)^2]_0^{t_1}$$

$$= \frac{1}{2}LI^2 \qquad (7.29)$$

と得られる．

5-5 節で見たように，電気抵抗のある導線に定常電流を流すときには，外からなされる電気的な仕事はすべて導線内でジュール熱に変わる．いまはこのジュール熱の発生はないから，エネルギーの保存則により外からなされた仕事はどこかに蓄えられていなければならない．これはコンデンサーを充電する場合とよく似ている．4-7 節で示したように，コンデンサーに蓄えられた電気的なエネルギーは，極板間に生じた静電場のエネルギーとして存在していると見ることができた．静電場のエネルギーは，単位体積当り

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (7.30)$$

である．これと同じように考えて，(7.29)式のエネルギーはコイルの周辺に生

じた磁場のエネルギーとして蓄えられていると見ることができる．

巻き数 n，長さ l，断面積 S のソレノイドの場合，(7.20)式により $L=\mu_0 n^2 lS$ である．コイル内部の体積を $V=lS$ とすれば，蓄えられるエネルギーは

$$W=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 V$$

である．コイル内部の磁束密度は，(6.41)式により

$$B=\mu_0 nI$$

となるから，エネルギーを磁束密度で表わして

$$W=\frac{1}{2\mu_0}B^2 V$$

と書くこともできる．そこで，磁場のエネルギーが単位体積当り

$$\boxed{u_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2\mu_0}B^2=\frac{1}{2}\mu_0 H^2} \tag{7.31}$$

と与えられるとすれば，外からの電気的な仕事はすべて，このコイル内部の磁場のエネルギーとして蓄えられていると理解することができる．磁場のエネルギー密度(7.31)は，E と H，ε_0 と μ_0 との対応で，電場のエネルギー密度(7.30)と同じ形をしている．

問　　題

1. インダクタンスが 1 H のコイルに 1 A の電流が流れているときの磁場のエネルギーを，容量 0.1 μF のコンデンサーの電場のエネルギーに変換したとすれば，コンデンサーの極板の電荷は何 C になるか．

2. 7-5 節の問題 2 において，コイルに流れる電流が消えるまでの間に抵抗に発生するジュール熱を求め，それがコイルに蓄えられていた磁場のエネルギー $LI^2/2$ に等しいことを示せ．

3. 7-5 節の問題 3 で扱った同軸円筒に電流 I を流したとき，円筒間に生じる磁場のエネルギーを求めよ．また，自己インダクタンスを L としたとき，それが $LI^2/2$ に一致することを示せ．

4. 自己インダクタンスがおのおの L_1, L_2，相互インダクタンスが M の 2 つのコイル

1, 2がある．コイルにそれぞれ電流 I_1, I_2 を流したとき，磁場のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + MI_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2$$

で与えられることを，つぎの考え方にしたがって示せ．

(1) コイル1にのみ電流 I_1 を流したときのエネルギーは，(7.29)式により $U_1 = L_1 \cdot I_1^2/2$ である．

(2) コイル1に電流 I_1 を流しつづけたまま，コイル2に電流を流しはじめる．コイル2の電流が I になったとき，コイル1, 2を貫く磁束はそれぞれ

$$\Phi_1 = L_1I_1 + MI, \qquad \Phi_2 = L_2I + MI_1$$

である．I が時間的に変化するとき，各コイルに生じる誘導起電力 ϕ_1, ϕ_2 はどうなるか．

(3) 誘導起電力 ϕ_2 に抗してコイル2の電流を0から I_2 まで増やすために必要な仕事 U_2 はいくらか．

(4) コイル2の電流が0から I_2 まで変化する間，誘導起電力 ϕ_1 に抗してコイル1に電流 I_1 を流しつづけるために必要な仕事 U_3 はいくらか．

U_1, U_2, U_3 の合計が，2つのコイルに蓄えられている磁場のエネルギーである．

7-9 振動電流

導線に定常電流(直流)を流す場合，流れを抑える働きをするものは導線の電気抵抗であった．オームの法則(5.5)により，抵抗 R の導線に電流 I を流すには，外から RI の電位差をかけなければならない．時間的に振動する電流，交流を流すときには，事情はもっと複雑になる．電流をコイルに流すとき，電流が時間変化すると自己誘導起電力が生じるから，外からそれに見合う電位差をかける必要がある．回路にコンデンサーを挿入すると，導線はそこで切れているから，もちろん直流は流れない．しかし，交流であれば，コンデンサーの充電と放電とが交互に起こって，流れることができる．このように，回路に交流を流す場合に起こることは，直流の場合よりはるかに多彩で複雑になる．

例として，図7-13のように抵抗 R と自己インダクタンス L のコイルと容量 C のコンデンサーとを直列につないだ回路に，角振動数 ω の交流起電力 $\phi(t)$ をかけた場合を考えてみよう．回路に流れる電流を $I(t)$，コンデンサーに蓄えら

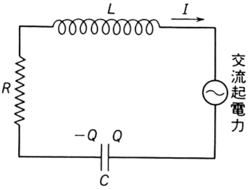


図 7-13　簡単な交流回路.

れる電荷を $Q(t)$ とする．このとき，抵抗にかかる電位差は直流の場合と同じく $RI(t)$，コイルにかかる電位差は自己誘導起電力に相当して $LdI(t)/dt$，コンデンサーの電位差は $Q(t)/C$ となる．その和が外からかけた起電力 $\phi(t)$ とつり合うので，

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)+\frac{1}{C}Q(t)=\phi(t) \tag{7.32}$$

が成り立つ．コンデンサーに電流が流れこむとその電荷が増加するから，$Q(t)$ と $I(t)$ の間には

$$\frac{dQ(t)}{dt}=I(t) \tag{7.33}$$

の関係がある．これらの微分方程式を解くことによって，回路に流れる電流を求めることができる．

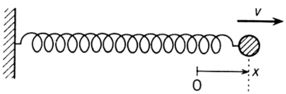


図 7-14　バネにつけたおもりの運動.

(7.32), (7.33) の微分方程式は力学における振動子の運動，たとえば図 7-14 のようなバネに付けたおもりの運動を記述する方程式と全く同じ形をしている．バネが自然の長さにあるときのおもりの位置を原点にとり，そこから測ったおもりの位置を x，おもりの速度を v とすれば，

$$v=\frac{dx}{dt} \tag{7.34}$$

である．バネの強さを k とすれば，バネからおもりにはたらく力は $-kx$ である．おもりは粘性のある液体の中におかれているとし，粘性抵抗の係数を η と

すれば，粘性による力は $-\eta v$ となる．おもりの質量を m，外力を f とすれば，おもりの運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx-\eta v+f$$

すなわち

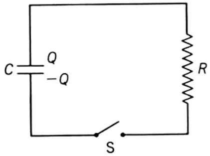
$$m\frac{dv}{dt}+\eta v+kx = f \tag{7.35}$$

となる．$v \sim I$, $x \sim Q$, $m \sim L$, $\eta \sim R$, $k \sim 1/C$, $f \sim \phi$ の対応で，振動子の運動方程式(7. 35), (7. 34)は交流回路の方程式(7. 32), (7. 33)と全く同じ形をしている．交流回路には，このおもりの運動の場合と同じことが起こると期待される．

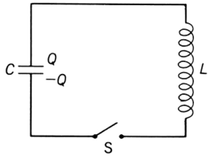
問　　題

1. 図のように，コンデンサー C に抵抗 R をつなぎ，スイッチを開いてコンデンサーに電荷 $\pm Q$ を与える．スイッチを閉じたとき，コンデンサーの電荷，回路に流れる電流は時間とともにどう変わるか．また，コンデンサーの電荷が消失するまでの間に抵抗でジュール熱に変わるエネルギーが，最初コンデンサーに蓄えられていたエネルギーに等しいことを示せ．

とくに，コンデンサーの容量 $C=0.1\ \mu F$，抵抗 $R=100\ \mathrm{k\Omega}$ の場合を数値的に検討せよ．



問題 1



問題 2

2. 図のように，容量 C のコンデンサーにインダクタンス L のコイルをつなぎ，スイッチを開いてコンデンサーに $\pm Q$ の電荷を与える．スイッチを閉じたとき，コンデンサーの電荷，および回路を流れる電流は時間とともにどう変わるか．また，コンデンサーに蓄えられる電場のエネルギーと，コイルに蓄えられる磁場のエネルギーはどう変わるか．回路の抵抗は無視できるとする．

とくに，コンデンサーの容量 $C=0.1\ \mu\mathrm{F}$，コイルのインダクタンス $L=1\ \mathrm{H}$ の場合を

数値的に検討せよ.

7-10 複素インピーダンス

いま，交流起電力が

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t + \alpha) \tag{7.36}$$

と与えられたとしよう．このとき流れる電流を求めるには，$\phi(t)$ を(7.36)式において微分方程式(7.32), (7.33)を解けばよい．この数学の問題はつぎのように考えることによって簡単になる．起電力が角振動数 ω で振動するとき，それによって生じる電流や電荷も同じ ω で振動するであろう．そこで

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \beta) \tag{7.37}$$

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \gamma) \tag{7.38}$$

とおく．β, γ は必ずしも α と一致しない．これらの定数を**位相**(phase)と呼ぶ．位相は振動の強さ(**振幅** amplitude) I_0, Q_0 とともに，振動の性質を示す重要な量である．あとは，(7.36)～(7.38)式を微分方程式に代入し，それぞれの振幅と位相を決めればよい．

しかし，(7.36)～(7.38)の表式をそのまま扱うと式が複雑になるので，つぎのような方法が便利である．まず，θ が実数のとき

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{7.39}$$

となることに注目し，(7.36)～(7.38)の実数の関数のかわりに，複素数の関数

$$\tilde{\phi}(t) = \phi_0 e^{i(\omega t+\alpha)} = \tilde{\phi} e^{i\omega t}, \quad \tilde{\phi} = \phi_0 e^{i\alpha} \tag{7.40}$$

$$\tilde{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t+\beta)} = \tilde{I} e^{i\omega t}, \quad \tilde{I} = I_0 e^{i\beta} \tag{7.41}$$

$$\tilde{Q}(t) = Q_0 e^{i(\omega t+\gamma)} = \tilde{Q} e^{i\omega t}, \quad \tilde{Q} = Q_0 e^{i\gamma} \tag{7.42}$$

を考える．(7.39)式により，これらの関数はその実数部が物理的に意味のある(7.36)～(7.38)式に一致する．いま，これらの複素数の関数が解くべき微分方程式を満たしているとしよう．すなわち，(7.32)式については

$$L\frac{d\tilde{I}(t)}{dt} + R\tilde{I}(t) + \frac{1}{C}\tilde{Q}(t) = \tilde{\phi}(t)$$

となる．ここで，複素数の関数を

$$\tilde{\phi}(t) = \phi(t)+i\phi'(t)$$

のように，実数部と虚数部に分ける．$\tilde{I}(t), \tilde{Q}(t)$ についても，同様にその虚数部をそれぞれ $I'(t), Q'(t)$ と書けば，

$$\left\{L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)+\frac{1}{C}Q(t)\right\}+i\left\{L\frac{dI'(t)}{dt}+RI'(t)+\frac{1}{C}Q'(t)\right\}$$
$$= \phi(t)+i\phi'(t)$$

となる．L, R, C はすべて実数だから，{　} の中は実数である．これらの式が成り立つためには，両辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しくなければならない．実数部についてはちょうど(7.32)式になる．このことは，複素数の関数として微分方程式の解が得られれば，その実数部は物理的に意味のある実数の解を与えることを示している．(7.33)式についても同様である．

そこで，(7.40)～(7.42)の関数を方程式に代入し，まず複素数の解を求めよう．(7.33)式に代入すると，

$$\frac{d\tilde{Q}(t)}{dt} = i\omega\tilde{Q}e^{i\omega t}$$

であるから，

$$i\omega\tilde{Q}e^{i\omega t} = \tilde{I}e^{i\omega t}$$

が成り立つ．両辺から $e^{i\omega t}$ の因子をおとし，

$$i\omega\tilde{Q} = \tilde{I} \tag{7.43}$$

となる．同様に(7.32)式に代入して，両辺から $e^{i\omega t}$ をおとすと，

$$i\omega L\tilde{I}+R\tilde{I}+\frac{1}{C}\tilde{Q} = \tilde{\phi} \tag{7.44}$$

が得られる．このようにして，微分方程式は複素数 $\tilde{\phi}, \tilde{I}, \tilde{Q}$ に対する代数方程式に書き換えられる．

両式から $\tilde{Q}$ を消去して

$$\left(i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}\right)\tilde{I} = \tilde{\phi}$$

したがって，

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\phi}}{\tilde{Z}} \tag{7.45}$$

$$\tilde{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{7.46}$$

が得られる．$\tilde{Z}$ をこの回路の**インピーダンス**(impedance)という．インピーダンスもまた複素数である．(7.45)式はオームの法則(5.5)と同じ形をしており，$\tilde{Z}$ が抵抗 R に当っている．

一般に複素数を表わすのに複素平面が用いられる．複素平面は，複素数 w を実数部と虚数部に分けて

$$w = u + iv$$

と表わしたとき，u と v をそれぞれ横と縦の座標軸にとった平面である(図 7-15)．複素数 w はこの平面上の点 P(u, v) に対応する．このとき，w の絶対値は P と原点 O の間の距離で表わされ，

$$|w| = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{7.47}$$

である．また，OP と実数軸とのなす角 θ を，複素数 w の位相という．図からわかるように，θ と u, v との関係は

$$\tan\theta = \frac{v}{u} \tag{7.48}$$

となる．複素数 w は，その絶対値と位相で

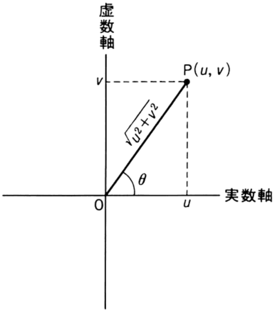


図 7-15 複素平面上の点で複素数 w を表わす．$w = u + iv$.

$$w = |w|\cos\theta + i|w|\sin\theta = |w|e^{i\theta} \tag{7.49}$$

と表わすこともできる．

インピーダンス $\tilde{Z}$ を，絶対値と位相で表わしたい．絶対値は(7.47)式により

$$|\tilde{Z}| = \sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2} \tag{7.50}$$

位相 θ は(7.48)式により

$$\tan\theta = \frac{\omega L-1/\omega C}{R} \tag{7.51}$$

と与えられる．この θ を使って，$\tilde{Z}$ は

$$\tilde{Z} = \sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}\, e^{i\theta} \tag{7.52}$$

となる．この表式を(7.45)式に用い，$\tilde{\phi}$, $\tilde{I}$ も(7.40), (7.41)式のように振幅と位相に分けて書くと，

$$I_0 e^{i\beta} = \frac{\phi_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}} e^{i(\alpha-\theta)}$$

となる．したがって，電流の振幅と位相とがそれぞれ

$$I_0 = \frac{\phi_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}} \tag{7.53}$$

$$\beta = \alpha-\theta \tag{7.54}$$

と与えられる．時間依存性を含めて実数部をとると，

$$I(t) = \frac{\phi_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}\cos(\omega t+\alpha-\theta) \tag{7.55}$$

となる．

この結果で注目されることは，第1に電流 $I(t)$ がその時刻の起電力 $\phi(t)$ に比例せず，θ だけの位相のずれが生じることであろう．起電力がある時刻 $t=t_1$ で最大になったとすると，それから $\Delta t=\theta/\omega$ だけずれた時刻に電流が最大になる(図7-16)．第2に，流れる電流の強さ(振幅)は振動数 ω によっている．とくに，振動数が

$$\omega L-\frac{1}{\omega C} = 0$$

すなわち，

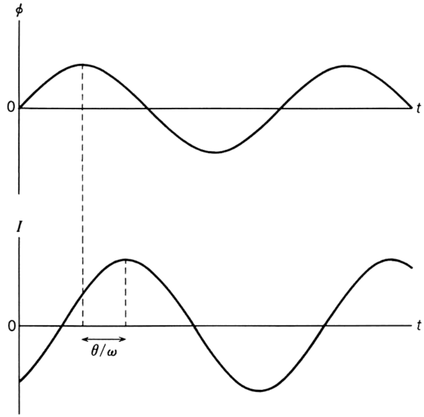


図 7-16　交流回路にかかる電位差と，流れる電流の時間変化.

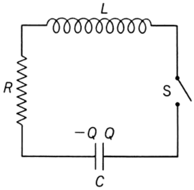
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{7.56}$$

のとき電流の振幅は最大になる．抵抗 R が小さければ，このときの電流は非常に大きい．

これは力学で学んだ振動子の**共鳴**(resonance)と同じ現象で，(7.56)式はこの回路の固有振動数である．振動子にその固有振動数と同じ振動数の周期的な外力を作用させると，振動子には強い振動が起こる．これが振動子の共鳴で，(7.35)式の場合にはその固有振動数は $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ である．$m \sim L$, $k \sim C^{-1}$ と対応させると，これは(7.56)式と一致する．この交流回路の場合にも，回路は(7.56)式で与えられる固有振動数をもっており，それと同じ振動数の電気的な力を外から作用させると，共鳴が起こって強い電気的な振動が生じる．ラジオやテレビで電波で送られてきた信号を受信するとき，この共鳴現象を利用している．電波ではいろいろな振動数のものが送られてくるが，受信器中の回路のコンデンサーの容量を変えることにより回路の固有振動数を変え，受信したい電波の振動数に合わせて共鳴を起こさせるのである．

問　　題

1. 図のように，コンデンサー(容量 C)，コイル(自己インダクタンス L)，抵抗(R)を直列につなぎ，スイッチを開いてコンデンサーに電荷 $\pm Q$ を与える．スイッチを閉じたとき，回路に流れる電流はどのように時間変化するか．



問題 1

8

マクスウェルの方程式と電磁波

電流とそれによって生じる磁場との関係を与えるアンペールの法則は，電流が時間的に変動する場合にそのままあてはめると，電荷の保存則と矛盾する．この点に注目したマクスウェルは，時間的に変動する電場も電流と同じように磁場をつくり出すことを見出した．かくして，電磁場の基礎法則であるマクスウェルの方程式が完成する．それによって，変動する電磁場は空間を光速 c で波として伝わることが明らかになる．

8-1 変動する電流と電荷の保存

7–5 節では，回路に流れる電流が時間的に変化するとき，その電流によって生じる磁場は，各時刻の電流がつくる静磁場と同じになると考えた．すなわち，そこでは電流が時間変化する場合にも，磁場の基本法則として

$$\int_C \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}ds = \mu_0\int_S \{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}dS \tag{8.1}$$

もしくは

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) \tag{8.2}$$

が成り立つとしている．

アンペールの法則(6.37)では，右辺で電流を積分する曲面 S は，経路 C を縁にするものであればどのような形に選んでもよい．ところが，それを時間変化する場合に拡張した(8.1)式でも同じように考えると，この方程式は矛盾を含むことになる．たとえば，図 8-1 のように，充電した平行板コンデンサーに導線をつなぎ電流を流したとき，その電流によって生じる磁場にこの法則を適用してみる．経路 C を導線をひと巻きするように選び，曲面を図の S_1 のようにとると，たしかに電流はこの曲面を貫いており，(8.1)式の右辺は 0 でない．ところが曲面の形を変えて，S_2 のように平行板コンデンサーの隙き間を通るようにすると，そこには電流が流れていないから曲面を貫く電流はなく，(8.1)式

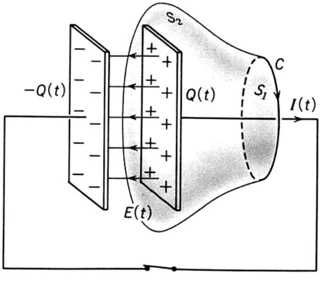


図 8-1 回路 C を貫く電流は，曲面を S_1 にとると 0 でないが，S_2 にとると 0 になる．

の右辺は0になる．曲面のとり方で結果がこのように違ってしまうのは，法則に欠陥があることを示している．

同様のことは，微分形に書いた(8.2)式についてもいえる．この式の両辺の発散をつくると，

$$\nabla\cdot\{\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\} = \mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)$$

となる．ところが(6.46)式で示したように，ベクトルの回転の発散は恒等的に0になるから，左辺は0である．したがって，電流に対して

$$\nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{8.3}$$

が成り立たなければならない．この式は時間的に変化しない定常電流であれば，電荷の保存を表わしている((5.4)式)．しかし，電流が時間変化するとき，この関係は一般には成り立たない．‘発散’という量の物理的な意味は，点 $\boldsymbol{r}$ の周辺に体積 $\varDelta V$ の微小な領域を考えると，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)\varDelta V \tag{8.4}$$

がその領域から流れ出す電流を表わす，というものであった．すなわち，単位時間当りこれだけの電荷が，領域の外に流れ出すことになる．電荷の保存則からいうと，その領域内の電荷がそれだけ減少する．電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r},t)$ とすると，領域内の電荷の量は $\rho(\boldsymbol{r},t)\varDelta V$ であるから，(8.4)式が領域内の電荷の減少に等しいという関係は，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)\varDelta V = -\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\varDelta V$$

と表わされる．すなわち，電流が時間変化するときの電荷の保存則は，(8.3)式ではなくて

$$\boxed{\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) = 0} \tag{8.5}$$

になる．(8.2)の法則はこの電荷の保存則と矛盾するのである．

(8.1), (8.2)の法則には，なにかが欠けているといわねばならない．

8-2 変位電流

もう一度，図 8-1 の場合を考えてみよう．曲面を S_2 に選んだとき，たしかにそこを貫く電流はないが，かわりに電場が生じている．コンデンサーを充電させたまま回路を開いておくと，電流が流れないから磁場はできない．このとき曲面 S_2 を導体板の電荷によって生じた電場が貫いているが，静電場があってもそれによって磁場が生じることはない．それでは，スイッチを閉じて電流を流したとき，曲面 S_2 の上ではなにが起こるであろうか．電流が流れるとコンデンサーの電荷が減少し，それに伴い極板間の電場が時間変化を始めるのである．

コンデンサーの電荷を Q，極板の面積を A とすれば，極板上の電荷密度は $\sigma=\pm Q/A$ である．(4.1)式により電場 E は右向きを正として

$$E=-\frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

となる．電流が流れると電荷が減少する．電荷 Q の減少分が電流 I として流れるから，Q と I の間には

$$-\frac{dQ(t)}{dt}=I(t)$$

の関係が成り立つ．したがって，電場の方にも時間変化が起こり

$$\frac{dE(t)}{dt}=-\frac{1}{\varepsilon_0 A}\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{1}{\varepsilon_0 A}I(t)$$

すなわち，

$$\varepsilon_0\frac{dE(t)}{dt}A=I(t) \tag{8.6}$$

となる．

この結果は，つぎのように理解できるだろう．図 8-1 の場合にアンペールの法則(8.2)を適用するとき，経路 C を縁にした曲面が導線と交わっていれば，導線を貫く電流は $I(t)$ である．曲面が極板の間を通るときは曲面を貫く電流は

ないが，かわりに電場の時間変化が生じている．そこで，極板間の真空中では

$$\varepsilon_0 \frac{dE(t)}{dt} \tag{8.7}$$

という量が電流密度と同じ働きをすると考え，それを曲面上で積分したものを(8.1)式の右辺につけ加える．こうすれば積分は曲面 S の選び方によらなくなる．この項をつけ加えたアンペールの法則は

$$\boxed{\int_C \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds = \mu_0\int_S\left[\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right]\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})dS} \tag{8.8}$$

となる．このように拡張されたアンペールの法則は矛盾のない結果を導く．

微分形の法則(8.2)についても，(8.7)式に相当する項をほんとうの電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ と並んで，右辺につけ加えればよいであろう．すなわち，(8.2)式を

$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\left\{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right\}} \tag{8.9}$$

と書き直す．こうすると，両辺の発散をとったとき，左辺が恒等的に 0 になることから

$$\nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon_0\nabla\left\{\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right\} = 0$$

となる．第 2 項で t の微分と $\boldsymbol{r}$ の微分は順序を入れ換えてよい．時間変化する電場に対してもガウスの法則はそのまま成り立つとすれば，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{8.10}$$

である．したがって，上式の第 2 項は電荷密度の時間微分になって，この式は電荷の保存則(8.5)に一致する．アンペールの法則(8.2)を(8.9)式のように修正することによって，法則の矛盾は解決する．(8.8)，(8.9)式で右辺につけ加えられた項

$$\boxed{\boldsymbol{i}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}} \tag{8.11}$$

は**変位電流**(displacement current)と呼ばれる．こう名づけられたわけは，10-1 節で物質中における方程式を導くときに明らかになる．

ガウスの法則やアンペールの法則，ファラデーの電磁誘導の法則はそれぞれ実験事実に基づいて，それを電磁場の方程式として定式化したものであった．それに対し変位電流は理論そのものの整合性という観点から，マクスウェルによって理論的に導入されたものである．(8.8),(8.9)式の法則を**マクスウェル-アンペールの法則**(Maxwell-Ampère's law)という．変位電流の実験的検証は，それを含む方程式から電磁波の存在が予言され，それがヘルツ(H. R. Hertz)により実験的に確認されることによって，はじめてなされたのであった．

例題 1　図 8-2 のような半径 R の円形の平行板コンデンサーを充電し，極板間を導線でつないで放電させたとき，極板間の空間に生じる磁場を求めよ．

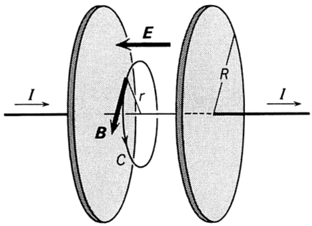


図 8-2　円形の平行板コンデンサーを放電させたとき，極板間の空間に生じる磁場．

［解］　(8.6)式によると，導線を流れる電流を $I(t)$ とすれば，極板間の空間には密度 $I(t)/\pi R^2$ の変位電流が一様に流れる．コンデンサーの形から見て，磁場は円板の中心軸のまわりを回転する向きに生じ，その強さは中心軸からの距離のみに依存することは明らかであろう．そこで，(8.8)式において，閉じた経路 C を図のように中心軸を中心とする半径 r の円に選び，この式を適用する．この経路の上で磁束密度の向きはいつも経路に沿っており，その大きさは一定の値をとる．経路の長さは $2\pi r$ なので，磁束密度の大きさを $B(r,t)$ とすれば，(8.8)式は

$$(\text{左辺}) = B(r,t)\times 2\pi r \tag{1}$$

となる．(8.8)式の右辺では，電流密度は 0，変位電流は $I(t)/\pi R^2$ の密度で一様

に分布している．したがって，変位電流の密度に経路 C の囲む面積 πr^2 をかけて

$$(\text{右辺}) = \mu_0 \frac{I(t)}{\pi R^2} \times \pi r^2 = \frac{\mu_0 r^2}{R^2} I(t) \tag{2}$$

となる．(1)=(2) とおいて，磁束密度として

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I(t) \tag{8.12}$$

が得られる．▌

電流が時間変化する場合，アンペールの法則が(8.8)，(8.9)式のように書き換えられるのだとすれば，7章における変位電流の項を落としたインダクタンスや交流の議論は，間違っていたのだろうか．

それは必ずしも間違いだったわけではない．そのような電流を準定常と見なす取り扱いも，ふつうの電流に比べて変位電流が無視できるほど小さければ許される．いま導体の内部で電場が

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \sin \omega t$$

と時間変化していたとしよう．このとき，電気伝導度を σ とすると，オームの法則により流れる電流密度は

$$\boldsymbol{i}(t) = \sigma \boldsymbol{E}(t) = \sigma \boldsymbol{E}_0 \sin \omega t$$

また変位電流の密度は

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{d}}(t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t$$

となる．したがって，変位電流を無視しうるための条件は，$\varepsilon_0 \omega \ll \sigma$，すなわち

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{8.13}$$

と表わされる．

ふつうの金属で電気伝導度はおよそ $\sigma \cong 10^7\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ の程度(表 5-1)，また $\varepsilon_0 \cong 10^{-11}\ \mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ だから，この条件は

$$\omega \ll 10^{18}\ \mathrm{s}^{-1} \tag{8.14}$$

となる．ふつうの交流で $\omega \sim 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$ の程度のときは，変位電流は完全に無視で

きることがわかる.

問　題

1. 振幅 E_0, 周波数 $f(=\omega/2\pi)$ の振動電場がある. つぎのおのおのの場合, 変位電流密度の最大値はいくらか.

(a)　$E_0=1\ \mu\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $f=10^6\ \mathrm{s}^{-1}$ の電波.

(b)　$E_0=10^6\ \mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $f=10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$ のレーザー光.

2. 銅とガラスのそれぞれについて, 振動数 $50\ \mathrm{s}^{-1}$ および $10^{10}\ \mathrm{s}^{-1}$ の振動電場がかかったときの伝導電流と変位電流の大きさの比を求めよ. (表5-1を参照せよ.)

3. 2個の小さな導体球に $\pm q$ の電荷を与えたのち, その間を抵抗の大きな導線で接続した. このとき, 導体球の電荷が減少する速さは十分ゆるやかで, まわりに生じる電場は各瞬間に導体球のもつ電荷 $\pm q(t)$ のつくる静電場と同じになるものとする. 導体球を結ぶ線分を垂直に2等分する平面上の変位電流密度を求めよ. また, マクスウェル-アンペールの法則(8.8)を用いて, この平面上の磁場を求めよ.

8-3　マクスウェルの方程式

私たちは, クーロンの法則から始めて, 電磁気現象に関する法則の1つ1つを電磁場の基礎方程式として定式化してきた. そしてこの長い道のりののちに, マクスウェルによる変位電流の導入によって, ようやく真空中の電磁場の基礎方程式を完全な形で書きあげることのできる段階に達した. 電束密度 $\boldsymbol{D}$, 磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ も使って書くと, それはつぎのようになる.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{8.15}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{8.16}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)-\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) \tag{8.17}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0 \tag{8.18}$$

ただし,

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \qquad (8.19) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \qquad (8.20) \end{aligned}}$$

である．(8.15)～(8.18)の方程式の組を，**マクスウェルの方程式**(Maxwell's equation)という．

Coffee Break

磁気単極はあるか

マクスウェルの方程式は見事な対称性を示しているが，電場と磁場が全く対称な役割をしているわけではない．電場にはそれをつくり出すもととして電荷があるが，磁場にはそれがない．磁場には電流があるが，電場にはそれに相当するものがない．要するに，電荷はあるのに遊離した磁荷は存在しないことが，電場と磁場の決定的な違いになっている．

磁荷はほんとうに存在しないのだろうか？ かりに遊離した磁荷が存在すると仮定して電磁気学をつくり直してみたとしよう．そのような電磁気学がなにか根本的な矛盾を含んでいて，絶対に成り立ちえないものだとすれば，自然界に磁荷が存在しないことも納得がいく．しかし，実際にはそうではない．理論的には磁荷は存在しうるのである．つまり，私たちの電磁気学は，私たちの身のまわりに磁荷が見当らないという経験的な事実に基づいてうちたてられたものなのだ．

また，最近の宇宙論の考え方によると，宇宙の初期それが大爆発(ビッグ・バン)を起こして膨張する過程で，多数の遊離した磁荷すなわち磁気単極が作り出された可能性がある．たしかに，私たちの身の回りのすぐ目のつく所に磁気単極はない．しかし，そのことは宇宙のどこにもないことを意味してはいないだろう．宇宙のどこかに残っていて，宇宙からやってくる宇宙線の中で見つかるかも知れない．磁気単極探しは続けられているが，見つかったという確かな報告はまだない．

電荷密度と電流密度の間には，電荷の保存則

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)=0 \tag{8.21}$$

が成り立たなければならないが，前節で示したように，この関係は(8.15), (8.17)式から自動的に導かれる.

(8.15)式と(8.16)式は，静電場と静磁場に対するガウスの法則が，電磁場が時間変化する場合にもそのまま成り立つことを仮定している．これらの法則は電場のもとが電荷であること，磁場に対しては磁荷が存在しないことを示す.

マクスウェルの方程式は，まずその見事な対称性が目を引く．方程式の対称性を保証する上で，(8.17)式の変位電流の項 $-\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ が不可欠なことは明らかであろう.

電磁場を記述するものは，電場のベクトル $\boldsymbol{E}$ と磁場のベクトル $\boldsymbol{B}$ で，それは成分に分けると合計 6 個の未知関数からなる．それに対し方程式の数は，(8.15)式と(8.16)式はスカラーの方程式だから各 1，(8.17)式と(8.18)式はベクトルの方程式だから，成分に分けると各 3 あって，合計 8 個になる．電荷と電流が与えられたとき，未知関数より方程式の数が 2 個多すぎるように見える．方程式が多すぎて解が存在しなくなる恐れはないだろうか.

その心配が無用であることは，つぎのようにしてわかる．まず，(8.17)式の両辺の発散をつくると

$$\nabla\cdot\{\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)\}-\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)$$

となる．ここで左辺の第 1 項は(6.46)式で示したように恒等的に 0 である．第 2 項に対しては時間 t の微分と $\boldsymbol{r}$ の微分を入れ換え，右辺には電荷の保存則(8.21)を使うと，

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)-\rho(\boldsymbol{r}, t)\}=0 \tag{8.22}$$

が得られる．したがって，{ } の中の量は時間に依存しない．すなわち，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)-\rho(\boldsymbol{r}, t)=F(\boldsymbol{r})$$

となる．そこで，ある瞬間に $F(\boldsymbol{r})=0$，すなわち(8.15)式が成り立っていると

すれば，その後電磁場が時間変化しても，いつまでも $F(\boldsymbol{r})=0$ で，(8.15)式は成立しつづける．(8.15)の関係は，(8.17)式と電荷の保存則とによって保障されているといってよい．

同じことは，(8.16)式についてもいえる．今度は(8.18)式の発散をとると，

$$\nabla\cdot\{\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\}+\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0$$

第1項は恒等的に0だから

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\}=0 \tag{8.23}$$

を得る．この場合にも，ある瞬間に(8.16)式が成り立っていれば，その後電磁場が(8.18)式にしたがって時間変化しても，(8.16)式は成立しつづける．

このように，マクスウェルの方程式のうち(8.15)式と(8.16)式は初期条件として成り立てばよく，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ との時間発展は(8.17)式と(8.18)式の6個の方程式によって完全に決められる．これで6個の未知関数に対して6個の方程式が与えられることになり，方程式が多すぎるという心配はいらないことがわかる．

問　題

1. 電荷も電流も存在しない真空中の電磁場は，方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=0$$

を満たすベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ を用いて，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$

と表わされることを示せ．

8-4　電磁場のエネルギー

はじめに力学の復習をしよう．質量 m の粒子がポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ で表わされる力を受けて運動するとき，その運動方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \tag{8.24}$$

と表わされる．ただし $\boldsymbol{v}$ は粒子の速度である．両辺と $\boldsymbol{v}$ のスカラー積をとると，

$$m\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{v}\cdot\nabla V(\boldsymbol{r})$$

となり，この式は

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+V(\boldsymbol{r})\right\} = 0 \tag{8.25}$$

と書き直される．この関係は，粒子の力学的エネルギー

$$U = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+V(\boldsymbol{r}) \tag{8.26}$$

が時間変化しないこと，すなわち力学的エネルギーの保存を表わしている．運動方程式(8.24)にエネルギー保存則がかくされているといってよい．

電磁場の場合，マクスウェルの方程式にもそのような性質がある．その性質を明らかにするには，(8.24)の運動方程式から(8.25)の保存則を導いたときと同じような計算をすればよい．まず(8.17)式と $\boldsymbol{E}$，(8.18)式と $\boldsymbol{H}$ とのスカラー積をつくると，

$$\boldsymbol{E}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{H}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = 0$$

を得る．両辺の差をとると

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i} \tag{8.27}$$

となる．左辺のはじめの 2 項は，$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}$ だから

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right) \tag{8.28}$$

とまとめられる．あとの２項は公式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) \tag{8.29}$$

を使って書き直すことができる．この公式はつぎのように成分で書き表わすことによって証明できる．すなわち，

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_x+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_y+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_z \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(E_yH_z-E_zH_y)+\frac{\partial}{\partial y}(E_zH_x-E_xH_z)+\frac{\partial}{\partial z}(E_xH_y-E_yH_x) \\
&= \frac{\partial E_y}{\partial x}H_z-\frac{\partial E_z}{\partial x}H_y+E_y\frac{\partial H_z}{\partial x}-E_z\frac{\partial H_y}{\partial x} \\
&\quad +\frac{\partial E_z}{\partial y}H_x-\frac{\partial E_x}{\partial y}H_z+E_z\frac{\partial H_x}{\partial y}-E_x\frac{\partial H_z}{\partial y} \\
&\quad +\frac{\partial E_x}{\partial z}H_y-\frac{\partial E_y}{\partial z}H_x+E_x\frac{\partial H_y}{\partial z}-E_y\frac{\partial H_x}{\partial z} \\
&= H_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+H_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+H_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \\
&\quad -E_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)-E_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)-E_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \\
&= \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})
\end{aligned}$$

(8.28)式と(8.29)式により，(8.27)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i} \tag{8.30}$$

とまとめられる．

(8.30)式の左辺は電荷の保存則(8.5)と同じ形をしている．したがって，もしも右辺が０であれば，この式は空間に

$$\boxed{u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)} \tag{8.31}$$

で表わされる‘密度’と

$$\boxed{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)} \tag{8.32}$$

で表わされる‘流れ’とが存在し，(8.5)式と同じように流出する分だけ密度が減少するという保存則を表わすものと解釈することができる．しかし，(8.5)式と違って(8.30)式は右辺が0でない．右辺の $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$ は，5-5節で見たように，単位体積中の荷電粒子が電場から受ける単位時間当りの仕事である．磁場があっても，ローレンツの力(6.8)は粒子の運動の向きに垂直にはたらくから，粒子は磁場からは仕事をされない．電磁場が荷電粒子に仕事をした分だけ減少するもの，それは一般的なエネルギーの保存則から見て，電磁場のエネルギーでなければならない．したがって，(8.31)式の $u(\boldsymbol{r},t)$ は電磁場のエネルギー密度，(8.32)式の $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ はその流れを表わすベクトルと考えられる．エネルギー密度の表式は，静電場，静磁場のエネルギー密度としてすでに得ている(4.34)，(7.31)式と一致している．$u(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ を使って電磁場のエネルギーの保存則は

$$\boxed{\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)} \tag{8.33}$$

と表わされる．この関係はポインティング(J. Poynting)によって導かれたもので，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ を**ポインティング・ベクトル**(Poynting vector)と呼ぶ．

例題1　導線を一様な電場 $\boldsymbol{E}$ の中に電場の向きに平行に張ったところ，強さ I の定常電流が流れた．このとき，まわりの空間に生じるポインティング・ベクトルを求め，電磁場のエネルギーの流れについて考察せよ．

［解］　6-4節で述べたように，直線上を流れる電流による磁場は，直線を軸にしてそのまわりを回転する向きに生じ，電流からの距離 r の点における強さは

$$H(r)=\frac{1}{\mu_0}B(r)=\frac{I}{2\pi r} \tag{8.34}$$

となる((6.11)式)．図8-3のように，電場と磁場の向きはどこでも互いに垂直

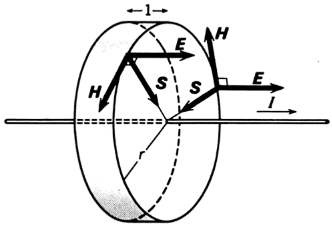


図 8-3　直線電流のまわりの電場，磁場とポインティング・ベクトル．

になるから，ポインティング・ベクトルはその両者に垂直で，電流の方を向く．その大きさは，電流からの距離 r の点で，

$$\begin{aligned} S(r) &= |\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})| = EH(r) \\ &= \frac{EI}{2\pi r} \end{aligned} \tag{8.35}$$

となる．電流のまわりに，図のような底面の半径 r，高さ 1 の円筒形を考えると，ポインティング・ベクトルはその側面に垂直で内側を向いている．したがって，その側面をとおして単位時間に

$$S(r)\times 2\pi r = EI \tag{8.36}$$

のエネルギーが流れこんでいることになる．▌

(8.36)式のエネルギーは，導線の単位長さの領域で単位時間に電場が電流になしている仕事にほかならない．すなわち，エネルギーの流れを見ると，これだけのエネルギーがまわりの電磁場から導線に向かって流れこみ，それが導線で電子の運動エネルギーになり，最後にジュール熱に変わるのである．

問　題

1. 8-2 節の例題 1 で扱った円形の平行板コンデンサーについて，極板の電荷が減少するとき極板間の空間に生じるポインティング・ベクトルを求めよ．また，極板の電荷が 0 になるまでの間に運び去られる電磁場のエネルギーが，はじめコンデンサーに蓄えられていたエネルギーにちょうど一致することを示せ．

2. 8-2 節の問題 3 において，導体球上の電荷が減少するにともない，まわりの空間にはどのような電磁場のエネルギーの流れが生じるか．2 個の導体球の中心を含む平面内

における流れの様子を描け.

8-5　電磁波

電荷も電流もない真空中で，マクスウェルの方程式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{8.37}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{8.38}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0 \tag{8.39}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0 \tag{8.40}$$

となる．ここで，とくに電磁場が1方向にのみ空間変化している特別な場合について考えてみよう．すなわち，空間変化する方向を z 軸に選ぶと，電場も磁場も x,y 座標にはよらず，z と t のみの関数になる場合である．それを $\boldsymbol{E}(z,t)$, $\boldsymbol{B}(z,t)$ と書く．

まず，(8.37)式と(8.38)式は，電場，磁場の x,y に関する偏微分は恒等的に0だから

$$\frac{\partial E_z(z,t)}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial B_z(z,t)}{\partial z}=0 \tag{8.41}$$

となる．また，

$$\{\nabla\times\boldsymbol{B}(z,t)\}_z=\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial x}-\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial y}=0$$

同様に，$\{\nabla\times\boldsymbol{E}(z,t)\}_z$ も0になるので，(8.39)と(8.40)の z 成分の式からは

$$\frac{\partial E_z(z,t)}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial B_z(z,t)}{\partial t}=0 \tag{8.42}$$

が得られる．(8.41)式と(8.42)式は，電磁場の z 成分がじつは時間にも場所にもよらないことを示している．このような一様な静電場，静磁場が真空中のマクスウェルの方程式の解になることは明らかであろう．この場合，変動する電磁場として興味があるのは，x,y 成分である．

つぎに(8. 39)式と(8. 40)式の x, y 成分を書く．第1項の x, y 成分はおのおの

$$\{\nabla\times\boldsymbol{B}(z,t)\}_x = -\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z}$$

$$\{\nabla\times\boldsymbol{B}(z,t)\}_y = \frac{\partial B_x(z,t)}{\partial z}$$

$$\{\nabla\times\boldsymbol{E}(z,t)\}_x = -\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z}$$

$$\{\nabla\times\boldsymbol{E}(z,t)\}_y = \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}$$

となるので，

$$-\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{8.43}$$

$$\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial z} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{8.44}$$

$$-\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial B_x(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{8.45}$$

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{8.46}$$

を得る．これらの方程式を見ると，E_x と B_y，E_y と B_x がそれぞれ組になって関連しあっている．したがって，たとえば E_y と B_x は0で，E_x と B_y は0でないような解が，これらの方程式の1つの解として存在する．まずそのような場合を考える．(8. 43)式を t で微分し，(8. 46)式を z で微分すれば

$$-\frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial t\partial z} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial z\partial t} = 0$$

となるので，この2式から $\partial^2 B_y(z,t)/\partial z\partial t$ を消去することにより，$E_x(z,t)$ に対する方程式として

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{8.47}$$

を得る．逆に(8. 43)式を z で，(8. 46)式を t で微分して E_x を消去すれば，$B_y(z,t)$ に対して同じ形の方程式

$$\frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial z^2} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{8.48}$$

が得られる．

(8. 47), (8. 48)式と同じ形の偏微分方程式は，いろいろな物理の問題によく現われるもので，**波動方程式**(wave equation)という．これを一般に位置 z と時刻 t の関数 $F(z,t)$ に対する方程式として書くと，

$$\boxed{\frac{\partial^2 F(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(z,t)}{\partial t^2} = 0} \tag{8.49}$$

となる．弦の振動の場合であれば，$F(z,t)$ は弦の振れの大きさを表わす．係数の c は波動の伝わる媒質の性質による定数で，(8. 47), (8. 48)式では

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}} \tag{8.50}$$

となる．

波動方程式の解は媒質中を伝わる波になる．角振動数 ω で振動する解は，(8. 47)式の場合について書くと，

$$E_x(z,t) = E_0 \cos(kz \mp \omega t) \tag{8.51}$$

と表わされる．t および z についての2次の微係数は

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(kz \mp \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = -k^2 E_0 \cos(kz \mp \omega t)$$

となるので，k と ω の間に

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{8.52}$$

の関係があれば，(8. 51)式は(8. 47)式の解になることがわかる．この関係を用いると，(8. 51)式は

$$E_x(z,t) = E_0 \cos k(z \mp ct) \tag{8.53}$$

となる．図 8-4 のように，時刻 $t=0$ に電場は $z=0$ の位置で最大になるが，時間がたつとともに，電場が最大になる点は $z=\pm ct$ に移動する．すなわち，(8.53)式の解はマイナスの符号が z 軸の正の向き，プラスの符号が z 軸の負の向きに速さ c で進む正弦波を表わす．(8.50)式で与えられる定数 c には，波の進む速さという意味があったわけである．(8.53)式は $2\pi/k$ の周期で空間変化しており，

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{8.54}$$

がこの波の波長である．k は長さ 2π の中に含まれる波の数を表わし，**波数** (wave number) と呼ばれる．

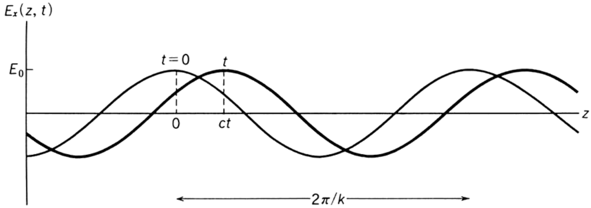


図 8-4　正弦波 $E_x = E_0 \cos k(z-ct)$.

電場と磁場は(8.43), (8.46)式によって関係づけられているから，電場が(8.51)式で与えられるとき，磁場も同じように時間的，空間的に変動する．すなわち，

$$B_y(z,t) = B_0 \cos(kz \mp \omega t) \tag{8.55}$$

(8.51), (8.55)式を(8.43)式に代入すると，

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = \pm \omega E_0 \sin(kz \mp \omega t)$$

$$\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} = -kB_0 \sin(kz \mp \omega t)$$

となるので，電場と磁場の振幅 E_0, B_0 の間には

$$B_0 = \pm\frac{E_0}{c} \tag{8.56}$$

の関係があることがわかる．(8.51)式と(8.55)式とをくらべてみると，電場が x 軸方向に生じるときには，それに伴って磁場が y 軸方向に生じ，両者は同じ時間，空間変化をしながら z 軸方向に速さ c で進む波になることがわかる(図8-5).

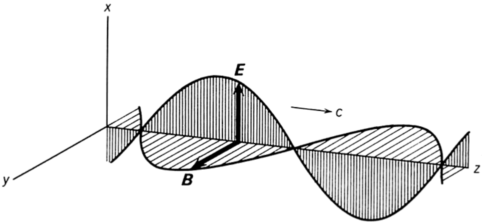


図 8-5　z 軸方向に進む電磁波における電場と磁場.

E_x と B_y は 0 で E_y と B_x が 0 でないとして(8.44), (8.45)式を解くと，電場と磁場の向きが入れ換わった解が得られる．この場合も，電場，磁場，波の進行方向が互いに垂直になるという性質は変わらない.

(8.53)式が波動方程式の解であれば，重ね合わせの原理により，異なる波数をもつ解の和

$$E_0 \cos k(z \mp ct) + E_0' \cos k'(z \mp ct)$$

も同じ波動方程式の解になることは明らかであろう．波は cos の代わりに sin で表わしてもよい．また，重ね合わせる正弦波の数はいくら多くてもよい．数学の定理によると，任意の関数はこのような正弦波の重ね合わせによって表わされる(フーリエ級数．第10巻『物理のための数学』参照)．この場合，こうして得られる関数の特徴は z と t に $(z \mp ct)$ というかたまりで依存していることである．すなわち，任意の1変数の関数を $f(u)$ としたとき，

$$E_x(z, t) = f(z \mp ct) \tag{8.57}$$

が波動方程式(8.47)の解になる．(8.53)式は一定の角振動数 $\omega = ck$ で振動する特別の場合であり，一般には伝わる波の形は正弦波とは限らない．電場が(8.

57)式で与えられるとき，磁場は

$$B_y(z,t) = \pm\frac{1}{c}f(z\mp ct) \tag{8.58}$$

となる.

私たちは，真空中のマクスウェルの方程式を解くことによって，変動する電磁場が真空中を波として伝わることを示した．この波を**電磁波**(electromagnetic wave)という．電磁場が波として伝わるわけは，(8.43)式と(8.46)式を見ればわかるように，変動する磁場が電磁誘導によって電場をつくり出し((8.46)式)，同時に変動する電場が変位電流として磁場をつくり出す((8.43)式)ことによっている．電場と磁場が相互に助けあうから波になるのであって，変位電流の項がなければ電磁波は存在しえない.

電磁波の伝わる速さ c は，(8.50)式に(1.5)式の ε_0 の値と(6.22)式の μ_0 の値を代入して，

$$\boxed{c = 2.9979\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}} \tag{8.59}$$

となる．よく知られているように，光も電磁波の一種だから，c は**光速**(light velocity)である．じつをいえば，(1.5)式の ε_0 の値は，そこでも述べたように，真空中のクーロン力の実験によって決められたものではない．クーロン力の実験は難しく，係数の精度のよい決定はできないのである．それに比べて光速の測定は精度のよい実験が可能で，ε_0 の値は光速の測定値(8.59)と μ_0 の定義された値(6.22)とから，(8.50)の関係によって決定される.

(8.57), (8.58)式の電磁場について，(8.31)式によりエネルギー密度を求めると，

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x(z,t)^2 + \frac{1}{2\mu_0}B_y(z,t)^2 \\ &= \varepsilon_0 f(z\mp ct)^2 \end{aligned} \tag{8.60}$$

となる．また(8.32)式により，ポインティング・ベクトルは z 方向を向き，

$$S_z(z,t) = \frac{1}{\mu_0}E_x(z,t)B_y(z,t)$$

空洞放射とフォトン

Coffee Break

電磁場はマクスウェルの方程式に従って振動し，振動の強さに応じたエネルギーをもつ．このような性質は，ふつうの粒子が振動する場合と変わらない．振動する粒子としては，たとえば固体の原子がある．固体原子は平均としては等間隔の規則的な配列をしながら，それぞれの位置のまわりで振動している．古典統計力学によると，固体が絶対温度 T の状態にあるとき各原子の平均の振動エネルギーは T に比例し，$k_{\mathrm{B}}T$ になる．k_{B} をボルツマンの定数という．その結果，固体の比熱は固体の種類によらず，原子数に比例した一定の値になる．この結論は実験ともよく一致している．

電磁場を固体と同じような状況におくには，中空の物体を熱すればよい．こうすると，空洞部分の真空がまわりの壁により熱せられて，そこには壁の温度に相当した電磁場の振動(空洞放射)が起こる．電磁場の様子を知るには，壁に孔を開けてそこからもれてくる光を観測すればよい．古典統計力学によると，この場合にも電磁場の振動はそれぞれ平均 $k_{\mathrm{B}}T$ のエネルギーをもつことになる．電磁場の場合固体の原子に当るものは，いろいろな振動数の振動である．ところが，固体の原子数は有限だが，電磁場の振動は振動数の低いものから高いものまで，無限にある．これでは真空の比熱は無限大だということになってしまう．また，温度によらず振動数の低い振動も高い振動も同じ強さで起こることになるが，これも物体が温度が低いときは赤く，高温にすると青白く光るという事実にあわない．

この困難を解決するため，1900年プランク(M. Planck)は振動数が ν の電磁場の振動エネルギーは $h\nu$ の整数倍の値しかとりえない，という‘量子仮説’を導入した．h をプランクの定数といい，$h=6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ という値をとる．つまり，電磁場の振動はエネルギーが $h\nu$ の粒子のように振舞うわけで，この‘粒子’はフォトンと呼ばれる．プランクによれば，振動のとりうる最低エネルギーは $h\nu$ だから，温度が T のとき $k_{\mathrm{B}}T<h\nu$ となる振動はほ

とんど起きえないことになる．したがって，振動数の高い振動は比熱に効かないから真空の比熱は無限大にならず，また低温では高い振動数の青い光は放射されないという事実も説明がつく．

プランクの空洞放射の理論は，1920年代にミクロな粒子の力学法則として量子力学が確立するにいたる第一歩であった．

$$= \pm c\varepsilon_0 f(z \mp ct)^2$$

$$= \pm cu(z, t) \tag{8.61}$$

となる．エネルギー密度 $u(z, t)$ がそのまま波の進行方向に光速 c で運ばれていることがわかる．

例題1 レーザーは光の放射に関する原子の性質を利用して，強い単色光のビームを放射させる装置である．出力1ワットのレーザーから，直径0.01 mmの細い光のビームが出ている場合，光の電磁場の強さはおよそどれほどか．

［解］ 1ワットの出力とは，レーザーから毎秒1ジュールのエネルギーが放射されていることを意味する．このエネルギーが，断面積

$$3.14 \times (5 \times 10^{-6})^2 \cong 8 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^2$$

の光のビームにより運ばれるから，エネルギーの流れの密度(ポインティング・ベクトルの大きさ)は

$$S \cong \frac{1}{8 \times 10^{-11}} \cong 1.3 \times 10^{10}\ \mathrm{J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}}$$

である．(8.61)式により，エネルギーの密度は

$$u = \frac{S}{c} \cong \frac{1.3 \times 10^{10}}{3 \times 10^8} \cong 43\ \mathrm{J \cdot m^{-3}}$$

となる．したがって，$u = \varepsilon_0 E^2$ の関係により電場は

$$E = \sqrt{\frac{u}{\varepsilon_0}} \cong \left(\frac{43}{9 \times 10^{-12}}\right)^{1/2} \cong 2 \times 10^6\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

となる．また磁場は(8.56)式により

$$B=\frac{E}{c}\cong\frac{2\times10^6}{3\times10^8}\cong6.7\times10^{-3}\ \mathrm{T}$$

となる. ▌

静止した電荷や定常電流の間にはたらく力のみを問題にしている間は，電場，磁場の概念を導入してもそれは単なる数学的な便宜に過ぎないように見えた．しかし，このように変動する電磁場が有限の速さ c で波として空間を伝わり，それが(8.61)式のようにエネルギーを運ぶとなると，話は別である．電磁場にはふつうの物質と違って質量がなく，手を触れて存在を実感することができな

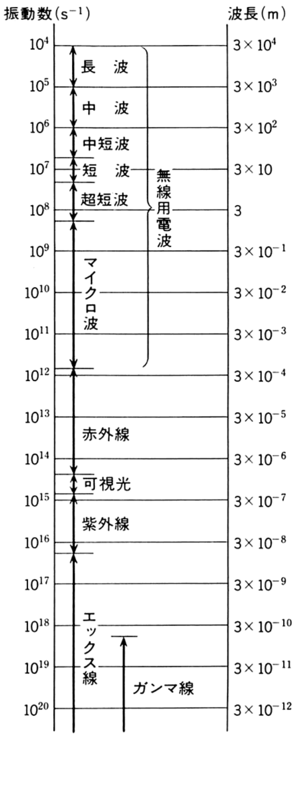


図 8-6 電磁波は振動数，波長領域によりいろいろの名前でよばれる．

いが，それでもふつうの物質と同様に確かな‘物理的実在’と見なければならない．マクスウェルによる電磁場理論の完成と電磁波の存在の予言(1864年)，ヘルツによるその発見(1888年)によって，電磁場を実在と見るファラデーの考えは実証されたのであった．

よく知られているように，光やエックス線も電磁波の一種である．電磁波は図8-6に示したように，その振動数 $f=\omega/2\pi$，波長領域によっていろいろな名前で呼ばれる．長波からマイクロ波までは無線通信用に利用されている．赤外線，可視光，紫外線は高温の物体から放射される．

問　題

1. 電場の振幅が $0.1\ \mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$ の電磁波において，磁束密度の振幅はいくらか．また，エネルギーの流れの密度(ポインティング・ベクトルの大きさ)はいくらか．

2. z 軸の正，負の向きにすすむ電磁波がある．電場は x 軸の方向を向き，

$$E_1(z,t) = E_0\cos(kz-\omega t)$$
$$E_2(z,t) = E_0\cos(kz+\omega t)$$

で与えられる．2つの電磁波が同時に伝わるとき，その重ね合わせによって生じる電磁場の振動はどのようになるか．

8-6 電磁波の放射と伝播

前節では，電場，磁場が1方向にのみ空間変化している特別な場合についてマクスウェルの方程式を解いた．この場合には，電磁波は z 軸に垂直な平面内で一定の値をとる．このように波が一定の値をとる面を**波面**(wave front)という．前節の電磁波は波面が平面だから，**平面波**(plane wave)と呼ばれる．

電磁波はいつも平面波になるとは限らない．空間の1点で電磁波が発生すると，それは波面が球面の**球面波**(spherical wave)となってまわりに広がるだろう．その波がなにかに反射し，あるいは回折を起こせば，さらに複雑な波面をなして伝播するに違いない．このような3次元的な波の伝播を記述する波動方程式は，マクスウェルの方程式(8.37)〜(8.40)からつぎのようにして導かれる．

まず(8.40)式の回転をつくると，

$$\nabla\times\{\nabla\times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\}+\nabla\times\left\{\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right\}=0 \tag{8.62}$$

となる．6-10 節で用いた公式(6.50)は任意のベクトルについて成り立つから，第1項はそれを使って

$$\nabla\times\{\nabla\times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\} = -\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\{\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\}$$

と書き換えられる．ここで，右辺の第2項は(8.37)式により0になるから，

$$\nabla\times\{\nabla\times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\} = -\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{8.63}$$

の関係が得られる．つぎに，(8.39)式を t で微分することにより，微分の順序を入れ換えて，

$$\nabla\times\left\{\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right\} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} \tag{8.64}$$

を得る．(8.63), (8.64)式を(8.62)式に代入して，電場のベクトル $\boldsymbol{E}$ に対する偏微分方程式

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=0} \tag{8.65}$$

が導かれる．これが一般の場合の波動方程式である．この x 成分をとると(8.47)式になる．磁場に対する波動方程式も同じ形になる．

3次元的な波動方程式(8.65)の解は，3次元空間を伝わる波になる．しかし，空間の狭い領域に限ってみると，そこで電磁場が空間的に変化している向きに z 軸を選べば，電磁場の様子は局所的に前節の場合と同じになると考えてよい．すなわち，電磁波はその z 軸の向きに進行し，図8-5のように電場と磁場は互いに垂直であり，また波の進行方向とも垂直になる．

荷電粒子が運動すると，まわりの電磁場が時間的に変動するから，そこに電磁波の伝播が起こる．電磁波の放射は，こうした荷電粒子の運動によって生じる．この問題を詳しく論じることはこの本の範囲を超えるので，ここでは簡単な場合について，定性的な考察を試みることにしたい．

図8-7のように，原点の近くに正負の電荷の対があって，z 軸上を互いに逆

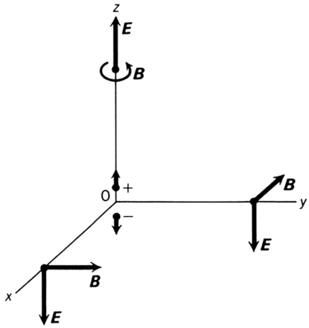


図 8-7　振動する電気双極子と電場，磁場の向き．

向きに動いて，小さな振幅で振動している場合を考える．原点に z 軸の方向を向いた電気双極子があり，そのモーメントの大きさが時間的に振動しているといってもよい．対称性からわかるように，z 軸上では電場はいつも z 軸を向き，その強さは粒子の振動に伴い振動する．電荷の運動による電流は z 軸に沿って流れるから，磁場は z 軸のまわりを回転するように生じる．z 軸上では電磁波の伝播に必要な状況，すなわち，振動する電場と磁場が互いに垂直で，かつ伝播の方向(z 軸)とも垂直になるという状況は生じていない．したがって，この場合電磁場が変動しても，z 軸方向への電磁波の伝播は起きないと考えられる．

つぎに xy 面内，たとえば x 軸上の電磁場の様子を見よう．ここでは図 2-7 でも見たように，電気双極子による電場は z 方向を向き，その強さはモーメントの振動に伴い振動する．磁場は z 軸のまわりを回転する向き，すなわち x 軸上では y 軸の方向を向いて，その大きさもモーメントの振動に伴い振動する．すなわち，x 軸上では振動する電場は z 軸方向，振動する磁場は y 軸方向と互いに垂直に生じるから，両者に垂直な x 軸方向へ電磁波が伝播する．

この振動する電気双極子による電磁波の放射を計算すると，その結果は図 8-8 の曲線のようになる．図では xz 面内のポインティング・ベクトルの方向依存性を，ベクトルの先をつないだ曲面で示した．上の定性的な考察の示すように，放射は z 軸方向で 0，xy 面内で最大になる．

このように荷電粒子が振動すると，まわりに電磁波が放射される．この粒子

Coffee Break

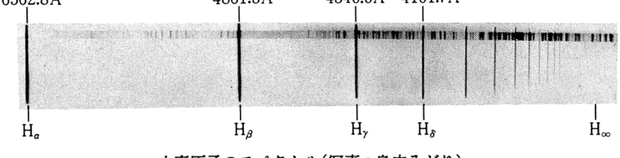
原子と光

原子の中では，正の電荷をもつ原子核のまわりを負の電荷をもつ電子が回転しているといわれる．そうだとすれば，そこには一種の電荷の振動が起きているわけで，8-6 節で述べた電気双極子の振動の場合と同じように，電磁波が放射されることになる．電磁波はエネルギーを持ち去るから，電子は次第に回転運動のエネルギーを失い，ついには原子核に落ちこんでしまうだろう．これでは，原子が安定に存在しているという事実を説明できない．

この困難は，原子内の電子の運動が量子力学に従うとすることにより解決された．電子の回転が，太陽のまわりの惑星の運動と同じようにニュートン力学に従うとすれば，円運動に限ってもそのエネルギーは連続的にどんな値でもとることができる．ところが量子力学によると，電子の運動に量子化が起こり，特別の条件を満たす運動しか許されないことになる．エネルギーもとびとびの値しかとることができない．電磁波の放射は連続的に起こるのではなく，電子が 1 つの状態から別の状態にとび移るとき，余分のエネルギーをフォトンとして放射する．はじめの状態，おわりの状態のエネルギーをそれぞれ E_1, E_2，放射される電磁波の振動数を ν とすれば，

$$E_1 - E_2 = h\nu \qquad (h：プランクの定数)$$

となる．したがって，E_1, E_2 がとびとびの値しかとりえないとすれば電磁波の振動数もとびとびの値になる．実際，原子の出す光のスペクトルは，連続的にいろいろな振動数のものが混ざって出てくる（連続スペクトル）のではな



水素原子のスペクトル（写真：島内みどり）．

く，とびとびの振動数の光だけの線スペクトル(写真)になる．その線スペクトルは，原子内電子の量子力学的な運動状態のもつ規則性を反映して，規則正しい配列になる．この事実に導かれて，ボーア(N. Bohr)は電子の運動がどのように量子化されるかを見出したのであった．

もっともエネルギーの低い運動状態に落ちこんだ電子は，それ以上エネルギーを失うことができない．こうして，安定な原子の存在も量子力学によって説明されたのである．

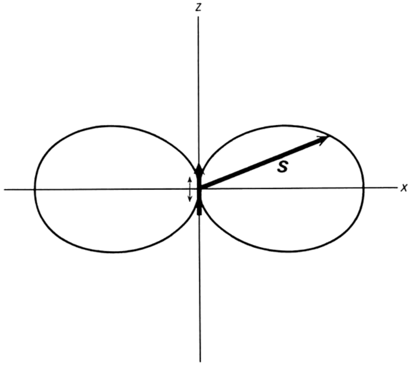


図 8-8　振動する電気双極子から放射される電磁波の強さの方向依存性.

が放射した電磁波は，絶えずエネルギーを無限遠に向けて運び去る．このエネルギーは粒子から電磁場に供給されたものである．このように荷電粒子が運動してまわりに変動する電磁場をつくり出している場合，粒子には電磁場から反作用の力がはたらく．粒子を振動させるためには，粒子に外から力を作用させて，この電磁場の反作用に抗して仕事をしなければならない．電磁波が持ち去るエネルギーは，もとをただせばこの外力が荷電粒子に行なう仕事である．

9

物質中の電場と磁場

絶縁体に静電場をかけると，電荷密度にわずかなずれが生じ，物質中に電気双極子モーメントが誘起される．その効果をとり入れた物質中の静電場の基本法則は，物質中の電束密度を新たに定義しなおすことによって，真空中の基本法則と同じ形にまとめられる．物質に静磁場をかけたときは，電流分布に変化が生じて磁気双極子モーメントが誘起される．この場合も，物質中の磁場の強さを定義しなおすことにより，基本法則は真空中と同形になる．

9-1 誘電体

導体と違って，絶縁体は電流を通さない．電場がかかっても，電荷の自由な移動は起きないのである．それでは，絶縁体を電場の中においたとき，なんの変化も生じないのだろうか．そうでないことは，絶縁体を平行板コンデンサーの極板の間に挿入してみればわかる．このときコンデンサーの電気容量の増大が見られる．なぜこのようなことが起こるかを，まずミクロな立場から考えてみよう．

導体の中では，電子の一部が原子から離れて，導体内部を自由に動き回る状態にあると考えられた(4-1 節)．これに対し絶縁体では，電子はすべて原子や分子に強く結びつけられていて，そこから離れることができない．絶縁体を構成する原子や分子は，それぞれがいつも電気的に中性の状態にある．しかし，電子は原子，分子の内部では，ある程度移動できる．そこで，絶縁体の原子，分子のモデルとしては，電荷が外に逃げないように表面を絶縁した小さな導体球を考えればよいであろう．

電場の中においた導体球のことは，4-4 節の例題 2 で調べた．そこで得た結果によると，導体球(半径 a)には電場に比例した電気双極子モーメント

$$\boldsymbol{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \boldsymbol{E} \tag{9.1}$$

が生じると見てよい．図 4-1 のように，電場に引かれて電子の分布が一方に片寄り，このようなことになったのである．

絶縁体の分子を電場の中においたときにも，これに似たことが起こると考えられる．電場がかかっていないときには，電子の分布に片寄りはなく，電子による負電荷の分布の重心と原子核による正電荷の分布の重心がちょうど一致している．2-9 節で示したように，このような場合，その分子は全電荷が 0 であるとともに，電気双極子モーメントももたない．そこに電場がかかると，電子が電場に引かれるために電子分布に片寄りが生じる．分子にかかる電場を $\boldsymbol{E}_\mathrm{m}$ とすれば，分子には $\boldsymbol{E}_\mathrm{m}$ に比例した電気双極子モーメント

$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} \tag{9.2}$$

が誘起されることになる．この現象を分子の**分極**(polarization)といい，αをその**分極率**(polarizability)という．9-2節で少し触れるように，分子にかかる電場はマクロに見た電場と必ずしも一致しないから，ここではそれをマクロな電場$\boldsymbol{E}$と区別して$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}$と書いた．このような分子が単位体積当り$N$個集まって物質ができているとすれば，物質全体にも単位体積当り

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = N\alpha \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} \tag{9.3}$$

の割合いで双極子モーメントが生じる．

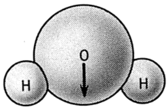


図9-1　水分子H_2Oの構造と電気双極子モーメント．

物質の種類によっては，それを構成する分子がはじめから双極子モーメントをもっている場合がある．たとえば，水の分子は図9-1のような形をしている．形が上下非対称であるため，電子分布は少し上に片寄っており，その結果として水分子は下向きの双極子モーメントをもつことになる．しかし，物質中で分子は無秩序な熱運動をしているから，電場がかかっていないときには，モーメントの向きは分子ごとにばらばらで，時間的にも乱雑に変動する．したがって，それをマクロな領域について平均すると消えてしまい，物質全体としては双極子モーメントをもたない．そこに電場がかかると，(2.9)式で示したように，分子にはその双極子モーメントを電場の向きに揃えるような偶力がはたらく．電場に引かれて，分子のモーメントは乱雑な熱運動をしながらも，電場の向きに揃う傾向を示す(図9-2)．その結果，双極子モーメントは平均しても消えずに残り，マクロに見た物質にも(9.3)式のような分極が生じることになる．

このように，絶縁体に電場をかけると電気双極子モーメントが誘起される．絶縁体をこのように見たとき，それを**誘電体**(dielectrics)と呼び，この現象を誘電体の分極という．

誘電体が分極するミクロな機構は以上のようであるが，これをマクロに見た

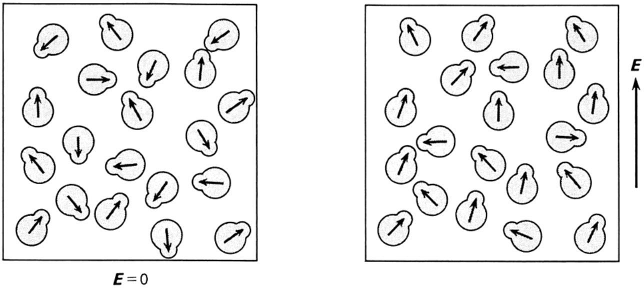


図 9-2　電場がないとき乱雑な方向を向いていた分子の電気双極子モーメントは，電場がかかると電場の方向をむく傾向を示す.

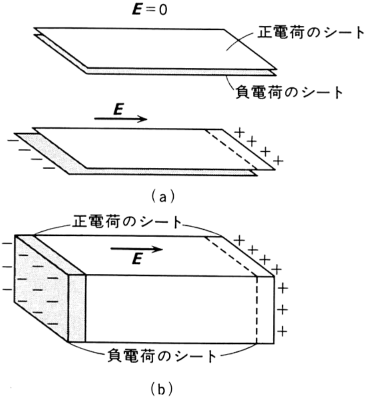


図 9-3　誘電体の正負の電荷シートが電場に引かれてずれ，両端に電荷が現われる(a). 実際の電荷シートは(b)のように3次元的である.

ときにはつぎのように考えればよい．図 9-3 のように，誘電体は正の電荷が分布した(3次元的な)‘シート’と負の電荷の分布した‘シート’とが重なったものと考える．電場がかかっていないときには，正電荷のシートと負電荷のシートとがちょうど重なり合っていて，正負の電荷が打ち消されて物質中のどこにも電荷は存在しない．そこに電場がかかると，図のように正負の電荷のシートが電場に引かれて逆方向にずれる．このような変化が起きても，誘電体の内部では正負の電荷の打ち消しあいはそのまま変わらない．ただし，物質の両端には

電荷のシートが少しずつはみ出し，表面にわずかながら正負の電荷が生じることになる．

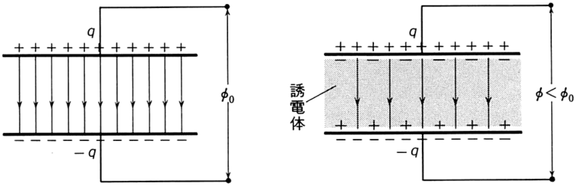


図 9-4　平行板コンデンサーに誘電体を挿入すると，その分極によって電場が弱められ，電位差が減少する．

このような見方で，平行板コンデンサーに誘電体を挿入した場合のことを考えてみよう(図 9-4)．コンデンサーに電荷を与えると，挿入された誘電体の負電荷のシートは正の電荷を持つ極板の方に引かれ，逆に正電荷のシートは負の電荷を持つ極板に引かれる．その結果，極板に接した誘電体の表面には，極板の持つ電荷と逆符号の電荷が生じることになる．誘電体の内部から見ると，極板の電荷はこの誘電体表面の電荷によって一部打ち消される形になり，誘電体の内部での電場の強さが弱められる．したがって，両極板の間の電位差は減少する．同じ電荷 q を与えても電位差が小さくなるのだから，これはコンデンサーの電気容量が増大したことを意味する．

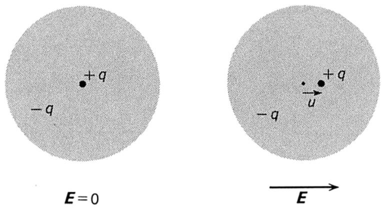
このような電場による誘電体の分極を考慮したとき，物質内部の静電場はどのようになるだろうか．つぎに，そのことをもう少し立ち入って考えてみたい．

問　題

1. 中性原子を正の点電荷 q(原子核)と，点電荷を中心とする半径 a の球内に一様な密度で分布する $-q$ の負電荷(電子)とからなると見なす(図)．この原子のモデルについて，その分極率を求めたい．

(1)　点電荷の位置が負電荷の中心から u だけずれたとき，点電荷にはどのような力がはたらくか(2-5 節例題 3 参照)．

(2)　この‘原子’に一様な電場 $\boldsymbol{E}$ をかけると，電場に引かれて正の点電荷と負電荷の中心の間にずれが生じる．ずれの大きさ u を，点電荷にはたらく力のつり合いの条件か



問題 1

ら求めよ．

(3)　この‘原子’の分極率を求めよ．

ただし，負電荷の分布密度はつねに一定に保たれるものとする．

2. 水の分子は図 9-1 のような構造をしている．H-O-H のなす角は約 105°，H と O の原子核間の距離は約 0.96 Å (1 Å $=10^{-10}$ m) である．水分子のもつ電気双極子モーメントは，6.14×10^{-30} C·m であるという．各原子内における電子の負電荷の平均分布が原子核のまわりに球対称であるとすれば，水素原子の電子の何パーセントが酸素原子に移っていると見ればよいか．

9-2　分極と電束密度

静電場によって生じる誘電体の変化をもっと定量的に表わすには，つぎのように考えればよい．誘電体の中に体積 ΔV の小さな領域を考え，そこでの正負の電荷のシートの電荷密度を $\pm\rho$ とする．この電荷に電場が働き，2 枚のシートの間に相対的に $\boldsymbol{u}$ のずれが生じたとしよう．ベクトル $\boldsymbol{u}$ の向きは負電荷のシートから見た正電荷のシートの変位の方向にとるものとする．このずれによって正負の電荷の重心に $\boldsymbol{u}$ のずれが生じるから，2-9 節で示したことからわかるように，この小領域には

$$\Delta\boldsymbol{P}=\rho\Delta V\boldsymbol{u} \tag{9.4}$$

だけの電気双極子モーメントが生じる．ここで，$\rho\boldsymbol{u}$ は電場によって誘電体に生じた双極子モーメントの密度を表わし，(9.4)式がミクロに見たときの(9.3)式に当ると考えてよい．電場が場所によっていたり，誘電体が不均一であった

りすると，このモーメントの密度も場所によって異なる．そこでこれを位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数として $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ と表わす．$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ を誘電体の**分極ベクトル**(polarization vector)という．

誘電体の分極を考慮したとき，静電場のガウスの法則がどうなるかを考えてみよう．ガウスの法則を適用するために，まず誘電体の内部に1つの閉じた曲面 S を選ぶ．そして，曲面を面積 ΔS の小領域に分割した上で，そのうちの1つに注目する．いつものように，小領域は平面と見なしてよい．誘電体に電場がかかり，この曲面上の点で電荷シートの相対的な変位 $\boldsymbol{u}$ が生じたとしよう．かりに負電荷のシートは動かず，正電荷のシートだけが動いたと考える．図9-5からわかるように，このとき体積 $u_n\Delta S$ の正の電荷が ΔS の面積を通過することになる．u_n はベクトル $\boldsymbol{u}$ の面に垂直な成分である．電荷の量にすれば，

$$\rho u_n \Delta S = P_n \Delta S$$

の電荷が ΔS を通過する．P_n は分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ の面に垂直な成分で，面に垂直な外向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として，$P_n=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ と表わされる．したがって，分極により

$$(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n})\Delta S \tag{9.5}$$

の電荷が，この小領域を通って閉曲面の内から外へ移動することになる．ベクトル $\boldsymbol{P}$ が閉曲面の内側を向いているときこの量は負になるが，それは正の電荷が外から内へ移動したことを意味する．ここでは正電荷のシートが動くと考えたが，負電荷のシートが $-\boldsymbol{u}$ だけ動くとしても，あるいは両方が少しずつ逆向きに動くとしても，この結論は変わらない．

(9.5)を閉曲面 S 上のすべての小領域について足し合わせる．その和は，ΔS

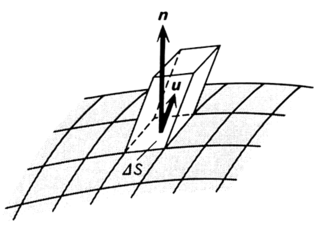


図9-5　誘電体の分極によって，底面積 ΔS，高さ $u_n=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ の角柱内の電荷が，ΔS を通過する．

$\to 0$ の極限をとると，ガウスの法則の電場の積分と同じ形の面積分

$$\int_S \{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\,dS$$

になる．これは誘電体の分極によって閉曲面 S の内から外へ移動した電荷の総量を表わす．その符号を変えたものを

$$q_{\mathrm{p}} = -\int_S \{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\,dS \tag{9.6}$$

とおくと，q_{p} は電荷の移動によって閉曲面の内部に生じた電荷にほかならない．この電荷は，導体の中での伝導電子の移動によるものと違って，原子，分子の内部でのわずかな電荷分布のずれによって生じたもので，これを**分極電荷** (polarization charge) という．分極電荷は物質から取り出すことはできず，物質全体についての和は必ず 0 になる．

(9.6)式を体積 ΔV の微小領域に適用すると，右辺の積分は 3-2 節で(3.7)式を導いたときと同じようにして

$$\{\nabla\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\}\,\Delta V$$

となる．また分極電荷の密度を $\rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r})$ と書くと，q_{p} は

$$q_{\mathrm{p}} = \rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r})\Delta V$$

と表わされるから，

$$\boxed{\rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})} \tag{9.7}$$

の関係が得られる．

物質中のガウスの法則では，電荷としてふつうの電荷のほかにこの分極電荷も考慮しなければならない．それは，微分形で書いて

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\{\rho(\boldsymbol{r})+\rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r})\}$$

となる．分極電荷密度に(9.7)式を用い，その項を左辺に移すと，

$$\nabla\cdot\{\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\} = \rho(\boldsymbol{r})$$

となる．ここで，物質中の電場に関する新しいベクトルとして

$$\boxed{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})} \tag{9.8}$$

を定義しよう．そうすると，物質中のガウスの法則は

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})} \tag{9.9}$$

と表わされる．積分形のガウスの法則が，同じ $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ を使って

$$\boxed{\int_S \{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\} dS = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV} \tag{9.10}$$

となることは明らかであろう．

真空中では分極がなく $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})=0$ だから，(9.8)式は2-10節で導入した電束密度の定義(2.55)と一致する．(9.8)式で定義される $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ を物質中の電束密度と見てよい．電束密度によって表わすと，ガウスの法則は(9.9), (9.10)式のように物質中でも真空中とまったく同じ形になる．式の右辺には分極電荷以外の移動可能な電荷だけが現われる．これを分極電荷に対して**真電荷**(true charge)と呼ぶ．

電場によって誘電体にどのような分極が生じるかは，物質によって異なる．結晶のように方向性のある物質では，分極しやすい向きと，しにくい向きとがあり，電場の向きと分極の向きとが一致するとは限らない．しかし，液体やガラスなどのように方向性のない物質で，しかも電場があまり強くないときには，分極はその場所の電場に比例し

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \chi_e \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{9.11}$$

となる．比例係数 χ_e を**電気感受率**(electric susceptibility)といい，物質により異なる値をとる．分極は電荷が電場に引かれて起こるものだから，いつも電場と同じ向きに生じ，どんな物質でも必ず $\chi_e>0$ になる．この表式を(9.8)式に代入すると，物質中の電束密度は

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = (\varepsilon_0 + \chi_e) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

となり，やはり電場に比例する．ここで比例係数を

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_e} \tag{9.12}$$

と置くと,

$$\boxed{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})} \tag{9.13}$$

となり，真空中の $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の関係(2.55)と同じ形になる．誘電体の中では，(9.12)式の ε が真空中の ε_0 と同じ役目をするわけで，これを誘電体の**誘電率**(permittivity)という．χ_e は正だから，どんな物質でも ε は ε_0 より大きい．誘電率 ε の真空の誘電率 ε_0 との比

$$\kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{9.14}$$

を**比誘電率**という．いくつかの物質について，その大きさを表 9-1 に示した．気体のように希薄な物質では 1 に近い．

表 9-1　いろいろの物質の比誘電率

(気体は 20°C, 1 気圧における値．液体，固体は常温における値)

	物質	比誘電率
気体	酸素	1.000495
	水素	1.000254
	二酸化炭素	1.000922
液体	エチルアルコール	25.07
	水	80.36
固体	パラフィン	1.9～2.4
	天然ゴム	2.7～4.0
	石英ガラス	3.5～4.0

静電場の渦なしの法則(2.23), (3.20)は，電荷にはたらく力が保存力であることを表わしていた．物質中で分極電荷による力が電荷にはたらいたとしても，その力が保存力であることに変わりはない．したがって，この法則は物質中でも真空中と同じように成り立つ．

結局，物質中の静電場の基本法則はつぎの 2 つの式にまとめられることがわ

かる．積分形に書くと，

$$\int_S \{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\, dS = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV \tag{9.15}$$

$$\int_C \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\, ds = 0 \tag{9.16}$$

微分形に書くと，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{9.17}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{9.18}$$

となる．これらの式の形は真空中の基本法則とまったく同じである．異なるのは電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ と電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ との関係だけで，物質中では基本法則に $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の関係式(9.8)または(9.13)を付け加えればよい．

ここで１つ注意しなければならないことは，誘電体の中で成り立つとした(9.11)もしくは(9.13)の比例関係は，真空中の電磁場に関する重ね合わせの原理と違って，近似的な関係にすぎないことである．比例関係は電場があまり強くない場合には成り立つとしてよいが，強い電場については成り立たない．たとえば，誘電体の分子に電子を閉じこめておく力は，強いとはいえ有限の大きさをもつ．その力にうち勝つほど強い電場を外からかけると，電子は電場の力で分子から引き離されるであろう．強い電場のもとではこのようなことが起こりうるので，誘電体の性質は(9.11), (9.13)式のような単純な関係では表わされなくなる．したがって物質中では，重ね合わせの原理が厳密には成り立たない．

例題 1 表 9-1 に示した酸素の比誘電率の値から，酸素分子の分極率を計算せよ．

［解］ (9.12), (9.14)式により，電気感受率 χ_e は

$$\frac{\chi_e}{\varepsilon_0} = \kappa - 1$$

と表わされる．酸素の場合 $\kappa = 1.000495$ だから，

$$\frac{\chi_e}{\varepsilon_0} = 4.95\times10^{-4}$$

となる．気体のように希薄な物質では，物質の分極によって生じる電場は弱く，(9.2)式の個々の分子にかかる電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}$ はマクロな電場 $\boldsymbol{E}$ に等しいと見てよい．したがって，単位体積中の分子数を N とすると，(9.3), (9.11)式により分子の分極率 α は

$$\alpha = \frac{\chi_{\mathrm{e}}}{N}$$

となる．気体 1 モル(22.4 l)中の分子数は 6.02×10^{23} 個(アボガドロ数)だから，単位体積(1 m^3)中の分子数は

$$N = \frac{6.02\times10^{23}}{22.4\times10^{-3}} = 2.69\times10^{25} \quad (\mathrm{m}^{-3})$$

したがって，

$$\frac{\alpha}{\varepsilon_0} = \frac{4.95\times10^{-4}}{2.69\times10^{25}} = 18.4\times10^{-30} \quad (\mathrm{m}^3) \tag{1}$$

となる．$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}$ を代入すると，

$$\alpha = 1.63\times10^{-40} \quad (\mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m})$$

が得られる．▌

9–1 節で述べた誘電体の分子に対する導体球のモデルによると，(9.1)式により α/ε_0 は導体球の体積の 3 倍になる．分子の大きさは数 Å の程度(1 Å$=10^{-10}$ m)だから，分子の体積は $10\times10^{-30}\ \mathrm{m}^3$ の程度である．(1)の結果はこの値に近い．導体球のモデルは，実際の誘電体分子の性質をよく表わしていることがわかる．

上の計算では分子の感じる電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}$ とマクロな電場 $\boldsymbol{E}$ とは同じものであるとした．これは希薄な物質の場合にはよいが，液体や固体のように分子が密につまった物質では正しくない．$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}$ には分極した他の分子の双極子モーメントによる電場を考慮に入れなければならないのである．この効果をとり入れると，液体などの等方的な物質では，分子にはたらく電場は

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{3}(2+\kappa)\boldsymbol{E} \tag{9.19}$$

となることが知られている．比誘電率 κ が 1 に近い物質では，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{E}$ として

よい.

問　題

1. 半径 a の誘電体の球に一様な分極 $\boldsymbol{P}$ が生じたとき，球の内部にどのような電場が生じるだろうか．この問題を，誘電体を正負の電荷シートからなると見なすモデルによって考えてみよう．

(1)　原点を中心とする半径 a の球内に密度 ρ で一様に分布する電荷が，球内の点 $\boldsymbol{r}$ につくる電場をベクトルの形で求めよ(2-5 節例題 3 参照)．

(2)　原点からずれた位置 $\boldsymbol{u}/2$ を中心とする半径 a の球内に密度 ρ で分布する電荷，$-\boldsymbol{u}/2$ を中心とする半径 a の球内に密度 $-\rho$ で分布する電荷が，それぞれ球内の点 $\boldsymbol{r}$ につくる電場 $\boldsymbol{E}_+, \boldsymbol{E}_-$ を求めよ．

(3)　$\boldsymbol{E}_+$ と $\boldsymbol{E}_-$ の和が，相対的に $\boldsymbol{u}$ だけずれた正負の電荷シートによって球内に生じる電場 $\boldsymbol{E}$ である．$\boldsymbol{E}$ を求め，それを分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ で表わせ．ただし，ずれの大きさ $|\boldsymbol{u}|$ は球の半径 a に比べて十分小さいとする．

2. 電気双極子モーメント p をもつ誘電体分子が電場 $\boldsymbol{E}$ の中におかれた場合，双極子モーメントが電場の方向を向くときと逆を向くときとのエネルギー差は $2pE\ (E=|\boldsymbol{E}|)$ である(2-8 節問題 4)．このとき，熱運動をする双極子モーメントが電場の方向を向く割合いは，このエネルギー差 $2pE$ と熱運動のエネルギー U_t との比で与えられ，1 個の分子の双極子モーメントの平均値 $\bar{p}$ は

$$\bar{p} \cong p\frac{2pE}{U_\mathrm{t}} = \frac{2p^2}{U_\mathrm{t}}E$$

となる．したがって，外から誘電体にかける電場と分子にかかる電場との差を無視すれば，この誘電体の電気感受率は

$$\chi_\mathrm{e} \cong \frac{2Np^2}{U_\mathrm{t}} \tag{1}$$

となる．分子の双極子モーメントは 5×10^{-30} C·m の程度，また熱運動のエネルギーは常温で 4×10^{-21} J の程度である．分子の平均間隔が 5 Å のとき，この誘電体の比誘電率 $\varepsilon/\varepsilon_0$ の 1 からのはずれはどの程度になるか．

9-3　静電場の境界条件

一様な誘電体中の静電場の問題は，電場があまり強くなければ，誘電率を真空の ε_0 からその物質の ε に置き換えるだけで，あとはまったく真空中の場合と同じになることがわかった．したがって，たとえば誘電率 ε の誘電体中においた導体の表面の電荷密度 σ と電場 E との関係は，(4.1)式で ε_0 を ε とおいて

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{9.20}$$

となる．また，平行板コンデンサーの導体板間に誘電体を挿入したときの電気容量は，(4.31)式の ε_0 を ε に置き換えて

$$C=\frac{\varepsilon A}{d} \tag{9.21}$$

となる．真空の場合に比べて，電気容量は κ 倍になる．

このように，誘電率 ε が空間のどこでも一定の値をとるときには問題はない．しかし，誘電体が空間の一部を占めているなどして ε が場所による場合には，分極が一様でなくなるから，真電荷がなくても分極電荷が生じ，そのことが静電場の様子を複雑にする．

誘電率が ε_1 と ε_2 の 2 種類の誘電体が接している場合に，その境界面で電場がどのようになるかを考えてみよう．これは，一方の誘電率を ε_0 とおけば，真空と接した誘電体の表面の問題になる．

はじめに，図 9-6 のように境界面上の点 $\boldsymbol{r}_1$ のまわりに境界面にまたがった

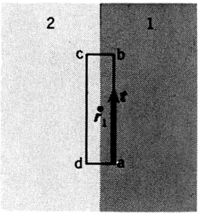


図 9-6　誘電体の境界面に渦なしの法則(9.16)を適用する．

小さな長方形の経路 abcda をとり，法則(9.16)を適用してみよう．この狭い領域では境界面を平面と見なしてよい．長方形の2辺 ab と cd は境界面に平行にとり，境界に垂直な2辺 bc と da は短くする．境界面の誘電体1の側の電場の強さを $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$，2の側の電場の強さを $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$ とする．長方形が十分小さければ，電場は辺 ab の上では一定の値 $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_1)$ を，辺 cd の上では一定の値 $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}_1)$ をとると考えてよい．したがって，辺 ab に沿った単位ベクトルを $\boldsymbol{t}$，辺 ab の長さを Δs とすれば，法則(9.16)の線積分のうち辺 ab, cd の分はそれぞれ

$$\int_{\mathrm{ab}} \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds = \{\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}\}\,\Delta s$$

$$\int_{\mathrm{cd}} \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds = -\{\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}\}\,\Delta s$$

となる．cd 上の積分では，辺 cd に沿う単位ベクトルは $-\boldsymbol{t}$ であることに注意しよう．辺 bc と da は短いので，その積分は無視すると，(9.16)の関係は

$$\int_{\mathrm{abcda}} \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds = \{\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}\}\,\Delta s$$
$$= 0$$

となる．したがって，境界上の各点において $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$ の間に

$$\boxed{\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}} \qquad (9.22)$$

の関係が成り立たなければならない．$\boldsymbol{t}$ は境界面に接する単位ベクトルだから，この関係は境界面の両側で電場の強さの接線成分が等しいことを示している．ε_1 と ε_2 は等しくないので，電束密度 $\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{r})=\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{r})=\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$ についてはこのような関係は成り立たない．

つぎに，図 9-7 のように境界面上の点 $\boldsymbol{r}_1$ のまわりに境界面にまたがる薄く小さな筒状の立体を考え，それに対してガウスの法則(9.15)を適用する．底面は境界面に平行で，筒の厚みは十分薄いものとする．前と同じように，電束密度は両底面 S_1, S_2 の上でそれぞれ一定の値 $\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{r}_1)$，$\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{r}_1)$ をとると考えてよい．したがって，面に垂直なベクトルを $\boldsymbol{n}$，底面積を ΔS とすれば，ガウスの法則の積分のうち S_1, S_2 からの寄与はそれぞれ

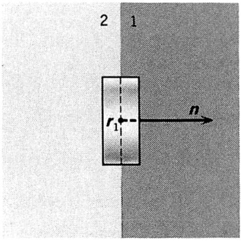


図 9-7 誘電体の境界面にガウスの法則(9.15)を適用する.

$$\int_{S_1} \{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\, dS = \{\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{n}\}\, \varDelta S$$

$$\int_{S_2} \{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\, dS = -\{\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{n}\}\, \varDelta S$$

となる. 側面は狭いのでそこからの寄与は無視してよい. 境界面の上に真電荷が存在しないとすれば, ガウスの法則の右辺は 0 になるから, (9.15)式は

$$\int_{S} \{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\, dS = \{\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{n}\}\, \varDelta S$$
$$= 0$$

となる. したがって, 電束密度については境界面上の各点で

$$\boxed{\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}} \tag{9.23}$$

の関係が得られる. すなわち, 境界面の両側で電束密度の面に垂直な成分が等しいのである. $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ だから, 電場の強さの垂直成分は等しくならない. これは, 境界面に分極電荷が生じたことによっている. 面上に電荷が分布していれば, その両側で電場が不連続になることは, 2-5 節の問題 1 で示した.

例題 1 誘電体の境界面で電場の向きはどのように変わるか.

[解] 図 9-8 のように, 境界面の誘電体 1 の側における電場の接線成分, 垂直成分を E_{1t}, E_{1n}, 誘電体 2 の側におけるそれを E_{2t}, E_{2n} とする. このとき, (9.22), (9.23)の関係はそれぞれ

$$E_{1t} = E_{2t}$$
$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

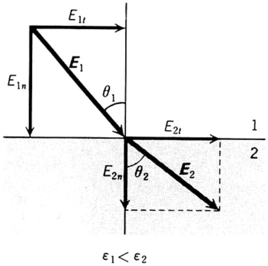


図 9-8　誘電体の境界面における電場の屈折.

と書かれる．電場が境界面の法線となす角を，図のように θ_1, θ_2 とすると，

$$\tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

だから，θ_1 と θ_2 の間には

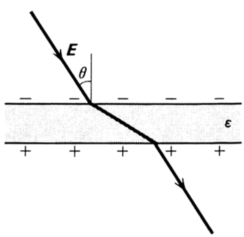
$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{9.24}$$

の関係があることがわかる．これが電場に対する‘屈折の法則’である．▌

問　題

1. 厚さ 0.1 mm，比誘電率 2.3，絶縁耐力(絶縁が破壊されずに耐えうる最大の電場の強さ) $5\times10^7\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$ の誘電体の膜がある．この膜を導体板の間にはさんで，容量 0.1 μF のコンデンサーをつくるには，極板の面積をいくらにすればよいか．また，絶縁体にかかる電場が絶縁耐力の 1/2 をこえない範囲で使用するとき，極板間にかけうる最大電位差は何 V か．

2. 図のように，誘電率 ε の広い平らな誘電体板を一様な電場の中におくとき，板の両面に生じる分極電荷密度を求めよ．ただし，板の法線と電場とのなす角を θ とする．



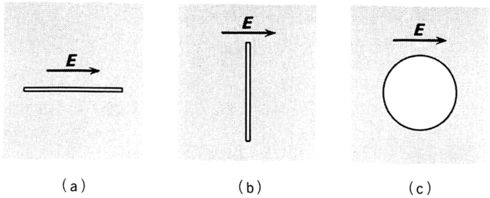
問題 2

3. 誘電率 ε の一様な誘電体内に一様な電場 $\boldsymbol{E}$ がある．この誘電体につぎのような形の空洞をつくると，空洞内の電場の強さはどうなるか．

(a)　電場の方向に平行な，細長い針状の空洞(図 a).

(b)　電場の方向に垂直な，薄く広い円板状の空洞(図 b).

(c)　球状の空洞(図 c).（真空中の一様な電場の中に誘電体の球をおいたとき，誘電体中に生じる電場は 9-2 節問題 1 の答を用いて求めることができる．真空と誘電体の役目を入れかえると，この場合の答が得られる.）



問題 3

9-4　誘電体があるときの静電場の例

この節では，誘電体がある場合に静電場を求める例題を考える.

例題 1　図 9-9 のように，平行板コンデンサーの極板の間に途中まで誘電率 ε の誘電体を挿入した．このときのコンデンサーの電気容量を求めよ．ただし，極板の間隔を d，極板の全面積を A，誘電体の挿入された部分の面積を A' とする.

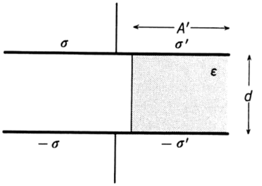


図 9-9　平行板コンデンサーに途中まで誘電体を挿入する.

[解]　コンデンサーの極板上の電荷密度を真空に接した部分で σ，誘電体に接した部分で σ'，極板間の電場の強さを真空中で E，誘電体中で E' とすれば，(4.1), (9.20)式により

$$\varepsilon_0 E = \sigma, \qquad \varepsilon E' = \sigma'$$

となる．しかるに，真空と誘電体との境界面での条件(9.22)から，$E=E'$ でなければならない．したがって，極板上の全電荷は

$$\begin{aligned} q &= (A-A')\sigma+A'\sigma' \\ &= \{(A-A')\varepsilon_0+A'\varepsilon\}E \end{aligned}$$

となる．両極板間の電位差は $\varDelta\phi=Ed$ だから，

$$q = \frac{(A-A')\varepsilon_0+A'\varepsilon}{d}\varDelta\phi$$

したがって，コンデンサーの電気容量は

$$C = \frac{q}{\varDelta\phi} = \frac{(A-A')\varepsilon_0+A'\varepsilon}{d} \tag{9.25}$$

と得られる．▌

例題 2 誘電率 ε の誘電体の平らな表面から距離 a の真空中の点に，大きさ q の点電荷が置かれている．このときの静電場を求めよ．

［解］ 点電荷による電場に引かれて誘電体が分極し，その表面に点電荷と逆符号の分極電荷が生じる．この分極電荷のつくる電場を，導体のときの鏡像法と同じように，仮想的な点電場のつくる電場に置き換えることを考えてみよう．

図 9-10 のように，境界面に垂直に z 軸，面内に x, y 軸をとり，$z>0$ の領域を真空，$z<0$ の領域を誘電体とする．点電荷の座標は $(0,0,a)$ である．このとき，境界面上の点 $(x,y,0)$ に点電荷がつくる電場は，(2.4)式により

$$E_x(x,y,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

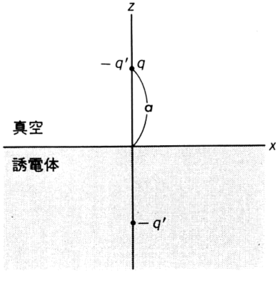


図 9-10 誘電体の近くにおいた点電荷とその鏡像．

$$E_y(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E_z(x, y, 0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

となる．境界面上の分極電荷が真空中につくる電場が，点 $(0, 0, -a)$ におかれた $-q'$ の点電荷によるものと同じになると仮定しよう．このとき，同じ分極電荷が誘電体の内部につくる電場が点 $(0, 0, a)$ におかれた $-q'$ の点電荷によるものと同じになることは，対称性から見て明らかであろう．これらの仮想的な点電荷が境界面上につくる電場は，上の式で q を $-q'$ と置き，また E_z については点電荷の位置によって a の符号に注意すれば得られる．境界面上の真空側の電場を $\boldsymbol{E}_1$，誘電体側の電場を $\boldsymbol{E}_2$ とすれば，真電荷による電場と仮想的な点電荷による電場とを合わせて，

$$E_{1x}(x, y, 0) = E_{2x}(x, y, 0) = \frac{q-q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E_{1y}(x, y, 0) = E_{2y}(x, y, 0) = \frac{q-q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E_{1z}(x, y, 0) = -\frac{q+q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E_{2z}(x, y, 0) = -\frac{q-q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

となる．境界面における電場の接続の条件のうち，接線成分についての(9.22)式は満たされている．これは仮想的な電荷の位置を $(0, 0, \pm a)$ としたことによっている．法線成分については，境界面上で

$$\varepsilon_0 E_{1z}(x, y, 0) = \varepsilon E_{2z}(x, y, 0)$$

が成り立つためには，

$$\varepsilon_0(q+q') = \varepsilon(q-q')$$

であればよい．これから仮想的な点電荷の大きさが

$$q' = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}q$$

と得られる．電場はこれらの点電荷のつくる電場を求めればよい．▌

問　題

1. 例題1において，両極板の電荷 $\pm q$ を一定に保ったまま，誘電体を微小距離 Δx だけ引き出したとき，コンデンサーのエネルギーはどれだけ変化するか．また，コンデンサーの極板が誘電体を引く力を F とすれば，誘電体を Δx だけ引き出すとき，外から $F\Delta x$ の仕事をしなければならない．この仕事がコンデンサーのエネルギーの増し高に等しいことから，力 F を求めよ．

2. 誘電率 ε の誘電体の球(半径 a)を一様な電場 $\boldsymbol{E}_0$ の中においたとき，球に生じる電気双極子モーメントを求め，導体球の場合(4-4節例題2)と比較せよ(9-2節問題1参照)．

9-5　磁性体

鉄やニッケルが永久磁石に吸いつくことはよく知られている．これは，永久磁石の磁場によって鉄やニッケルが一時的に磁石になり，その磁石と永久磁石とが磁気的な力で引きあうためと考えられる．磁場によって鉄やニッケルの中に磁気双極子が誘起されたわけで，電場による誘電体の分極に似ている．

磁場により物質中に磁気双極子が誘起される現象は，鉄の場合ほど強くはないが，ほかの物質でも起こる．ある種の物質では，それを構成する原子が小さな磁気双極子モーメントをもっている場合がある．しかし，原子の行なっている熱運動のために，モーメントの向きは原子ごとにばらばらで，時間的にも乱雑に変動する．そのため，物質はマクロには磁気双極子モーメントをもたない．そこに磁場がかかったときに起こることは，電気双極子モーメントをもつ誘電体の分子に電場がかかったとき(9-1節)と同じで，原子の磁気双極子は磁場からはたらく偶力の作用によって，磁場の方向に揃う傾向を示す．その結果，物質はマクロにも磁気双極子モーメントをもつようになる．

6-7節で述べたように，磁気双極子の本質は回転する電流であった．原子が磁気双極子をもつのも，原子の中に一種の回転電流が流れているためと考えられる．これには多くの場合，電子自身のおこなっている自転運動の寄与が大きい．電子の自転を**スピン**(spin)とよぶ．

原子がもともとは磁気双極子モーメントをもたない物質でも，それを磁場の中におくと，原子内の電子の運動に磁場の影響による変化がおこり，原子は双極子モーメントをもつようになる．この現象は，コイルに磁場をかけたときコイル内に電流が流れ出す電磁誘導の現象が，原子内でミクロにおきたものと考えてよい．電磁誘導による電流は，磁場を打ち消す向きに流れる．原子に生じる回転電流もこれと同じで，それによる原子の磁気双極子モーメントは，磁場と逆向きになる．個々の原子に磁気双極子が生じるから，物質はマクロにも磁気双極子モーメントをもつようになる．

このように，物質が磁場の影響で磁気双極子モーメントをもつようになる現象を，物質の**磁化**(magnetization)という．また，物質中に生じたマクロな双極子モーメントの密度，すなわち原子の双極子モーメントのベクトルをマクロな領域にわたって加え合わせ，単位体積当りに直したものを，**磁化ベクトル**(magnetization vector)とよぶ．一般に磁化ベクトルは物質中の場所 $\boldsymbol{r}$ によるので，$\boldsymbol{r}$ の関数として $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ と表わす．

物質を磁場に対する性質という面からみたとき，その物質を**磁性体**とよぶ．上で述べたように，物質の磁化には2つの機構がある．第2の機構はすべての物質に共通に起こるが，ふつうこの機構で生じる磁化は非常に小さい．そこで，原子が双極子モーメントをもつような物質では，第1の機構が第2の機構にかち，生じる磁化ベクトルは磁場と同じ向きになる．このような場合，その物質の性質を**常磁性**(paramagnetism)という．第2の機構しか存在しない物質では，磁化ベクトルは磁場と逆向きになる．その場合を**反磁性**(diamagnetism)という．

最初に述べた鉄やニッケルは磁場の影響をもっとも強く受け，大きな磁化ベクトルが生じる．じつは，この場合の磁化の機構は上に述べた2つの機構のどちらでもない．鉄の原子は磁気双極子モーメントをもつが，この場合隣りあう原子の双極子モーメントの間には強い力がはたらいている．この力は電子の量子力学的な性質によるもので，ふつうの磁気的な力に比べてはるかに強い．その効果によって，鉄では原子の双極子モーメントが1方向に揃っているのであ

る．ただし，ふつうの鉄では物質全体にわたって揃うのではなく，物質が磁区と呼ばれる小さな領域に分かれ，双極子モーメントはおのおのの磁区内では1方向に揃うが，その方向は磁区ごとにさまざま，という構造になる．磁区は光学顕微鏡でも見える程度の大きさで，マクロに見れば小さいが原子の大きさ(10^{-10} m の程度)に比べればはるかに大きく，その中には少なくとも10の十数

Coffee Break

超伝導

水銀や鉛などの金属を絶対温度で数 °K という極低温にすると，ある温度で突然その性質が変わり，電気抵抗が0の状態になる．金属が低温でみせるこの性質を超伝導という．超伝導金属で輪をつくり磁場をかけると，電磁誘導によって輪の中に起電力が生じるから，輪をめぐる電流が流れ始める．ふつうの金属の輪であれば，磁場が一定値になると起電力が消えるから，電流は抵抗により減衰して消える．超伝導金属の場合には，抵抗がないので電流はいつまでも流れつづける(永久電流)．

超伝導金属のもう1つの不思議な性質は，それが非常に強い反磁性を示すことである．超伝導金属に磁場をかけたとき，強い反磁性のために磁束密度が金属の内部に入りこむことができない．すなわち，超伝導金属ではいつも

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M} = 0$$

に保たれるのである．このような意味で，超伝導金属は完全反磁性体であるということができる．永久電流もじつはこの強い反磁性に伴う磁化電流と見られる．

超伝導は1911年にオランダのカマリン・オンネスによって発見されたが，それが理論的に解明されたのは，1957年のことである．今日では，超伝導になる数多くの金属や合金が知られており，超伝導は強い電磁石や敏感な測定装置など，いろいろな面に応用されている．

乗個の原子を含んでいる．この場合も，磁気双極子モーメントを磁区より広い領域にわたって平均すれば消えるから，物質は全体としては双極子モーメントをもたない．このような物質に磁場をかけると，各磁区内の磁気双極子モーメントには，磁場から偶力がはたらく．このため，磁区内の双極子モーメントは全体が揃って磁場の方向に向きを変える．こうして，物質には磁場の向きに大きな磁化ベクトルが生じることになる．このような物質の性質を**強磁性**(ferromagnetism)という．

鉄に不純物を混ぜるなどして適当な加工をほどこすと，各磁区の双極子モーメントを，向きを変えにくい状態にすることができる．このような強磁性体では，いったん双極子モーメントを物質全体にわたって1方向に揃えると，磁場がなくなっても元に戻らず，マクロに磁化ベクトルをもつ状態が保たれる．これが**永久磁石**(permanent magnet)である．

強磁性体は，いわば非常に強い常磁性体であるが，物質が非常に強い反磁性を示す場合もある．それは，ある種の金属が極低温で示す**超伝導**(superconductivity)である．

9-6 磁化と磁場の強さ

磁気双極子モーメントの本質は回転する電流であった．したがって，物質が磁化した場合，物質内に回転する電流が生じたものと見ることができる．物質の磁化に伴って生じる電流を**磁化電流**(magnetic current)という．

物質を小さな領域に区分し，その1つに注目しよう．磁化ベクトルを $\boldsymbol{M}$，小領域の体積を ΔV とすれば，その小領域内に生じた磁気双極子モーメントは $\boldsymbol{M}\Delta V$ である．小領域の側面には，この双極子モーメントに相当した回転電流が流れていると考えられる．しかし，磁化ベクトルが物質中の場所によらず一様なときは，隣りの小領域の側面にも同じ強さの回転電流が流れているから，両領域の境界面で電流はちょうど打ち消しあう．したがって，物質の内部に正味の電流は生じない．しかし，物質の表面では，その外側に物質がないからこ

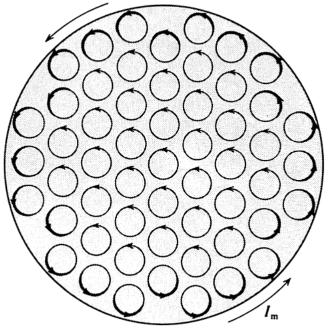


図 9-11　物質中に一様に回転電流が生じると，内部では電流が互いに打ち消しあうが，表面では打ち消しあう相手がなく，表面を回って流れる電流が残る.

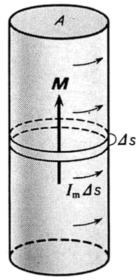


図 9-12　一様に磁化した円筒形の磁性体の表面に，回転する磁化電流が生じる.

のような打ち消しあいは起きず，図 9-11 のように回転電流がそのまま残る.

断面積 A の細長い円筒形の磁性体が，円筒の軸の向きに一様に磁化した場合を考えてみよう．磁化に伴う電流は，物質の表面に円筒の側面をとり巻くように流れる(図 9-12)．磁化ベクトルの大きさを M，磁化電流を円筒の単位長さ当り I_{m} とする．円筒を輪切りにした厚さ Δs の薄い円板に注目すると，円板の縁には強さ $I_{\mathrm{m}}\Delta s$ の回転電流が流れている．6-7 節で見たように，この回転電流は $\mu_0(I_{\mathrm{m}}\Delta s)A$ の磁気双極子モーメントに相当する((6.26)式)．一方，磁性体の磁化ベクトルからみると，この円板に含まれる磁気双極子モーメントは $MA\Delta s$ である．したがって，

$$MA\Delta s = \mu_0(I_{\mathrm{m}}\Delta s)A$$

から，磁化ベクトルと磁化電流の関係として

$$M = \mu_0 I_{\mathrm{m}} \tag{9.26}$$

が得られる．この結果は筒の断面の形によらない.

物質中で磁化が一様でないときには，物質の内部でも電流が完全には打ち消しあわず，磁化電流が生じる．その電流を求めるために，磁化ベクトルが一定の方向を向き，その大きさのみが空間変化している特別な場合を考えてみる.

磁化ベクトルの方向に z 軸，それと垂直に x, y 軸を選び，磁性体を図 9–13 のような直方体の小領域に区分する．各領域の x, y, z 軸に平行な辺の長さをそれぞれ $\varDelta x, \varDelta y, \varDelta z$ とする．領域を十分小さくつくると，磁化ベクトルは各領域の内部で一定の値をとると見なしてよい．いま x 方向に並んだ 2 つの領域 1, 2 に注目し，各領域内の磁化ベクトルの大きさをそれぞれ M_1, M_2 とする．各領域の側面に流れる磁化電流は，(9.26)式によりそれぞれ

$$I_1 = \frac{1}{\mu_0} M_1 \varDelta z, \qquad I_2 = \frac{1}{\mu_0} M_2 \varDelta z$$

となる．領域 1, 2 の境界面には差し引き y 方向に

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{\mu_0}(M_1 - M_2)\varDelta z \tag{9.27}$$

の電流が流れることになる．磁化ベクトルの大きさは空間変化しているので，$M_1 \neq M_2$ であり，この境界面で電流は打ち消されずに残る．

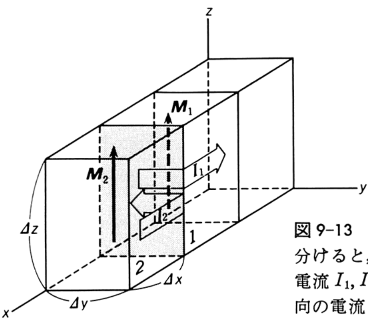


図 9–13　磁化した物質を小領域に分けると，領域 1, 2 の側面には磁化電流 I_1, I_2 が流れ，境界面に y 軸方向の電流 $I_1 - I_2$ が残る．

(9.27)式の電流を電流密度に換算するには，つぎのように考えればよい．x 軸に垂直に並ぶ境界面に残る電流は，それぞれが y 軸に垂直な面を区分した 2 辺が $\varDelta x, \varDelta z$ の長方形を貫いて流れる．すなわち，面積 $\varDelta x \varDelta z$ 当りに(9.27)式の電流 I が流れているわけで，電流密度は

$$i_{my} = \frac{I}{\varDelta x \varDelta z} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{M_2 - M_1}{\varDelta x}$$

となる．$M_2 - M_1$ は x 方向に $\varDelta x$ だけ隔たった 2 点間の磁化ベクトルの差であ

る．したがって，右辺の比は x 方向への磁化ベクトルの変化率を表わし，$\Delta x \to 0$ の極限をとると，磁化ベクトルの x についての偏微分係数になる．すなわち，磁化ベクトルの大きさを M_z と書けば，

$$i_{my} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial M_z}{\partial x} \tag{9.28}$$

の関係が導かれる．

つぎに，y 方向に隣りあった2つの領域の境界面に注目すると，そこには x 方向に電流が流れる．上と同じように考えると，その電流密度は磁化ベクトルの y 方向への変化率に比例することがわかる．すなわち，

$$i_{mx} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial M_z}{\partial y} \tag{9.29}$$

となる．

磁化ベクトルが大きさだけでなく向きも空間的に変化している一般の場合には，磁化ベクトルを成分に分けて考えればよい．(9.28), (9.29)式はその z 成分によって生じる磁化電流である．x, y 成分による電流の表式は，(9.28), (9.29)式で x, y, z を順次に入れ換えて得られる．3成分からの寄与を加え合わせて，

$$\begin{aligned} i_{mx} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) \\ i_{my} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) \\ i_{mz} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{9.30}$$

となる．この表式はベクトル $\boldsymbol{M}$ の回転の各成分にほかならない．すなわち，磁化電流密度 $\boldsymbol{i}_m(\boldsymbol{r})$ として

$$\boxed{\boldsymbol{i}_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})} \tag{9.31}$$

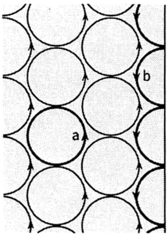
が得られる．

物質中のアンペールの法則では，磁場をつくり出すもととして，ふつうの電荷の移動による電流のほかに，この物質の磁化に伴う電流も考慮しなければな

Coffee Break

磁性と量子論

物質が磁化する機構については9-5節で述べたが，この説明には大事なところで少し足りない点がある．例として，金属電子の場合を考えてみよう．6-3節でみたように，磁場中を運動する荷電粒子は，磁場に垂直な面内で円運動をする．したがって，金属に磁場をかけると，電子による一種の回転電流が生じる．この回転電流による磁化は磁場の逆を向いており，これが金属の反磁性の機構だといってよさそうだ．しかし，じつをいうとこの説明は正しくない．金属の表面付近の電子の運動に注目してみよう．図のように，表面から離れたところを運動する電子aはちゃんとした円運動をするが，表面に近い電子bは表面に衝突するから表面に沿った運動をすることになる．たしかに，電子bがなければ，図6-10と同じように表面に沿う電流が残り，金属は磁化したといってよい．実際には，電子bの運動が表面電流を打ち消し，金属中のどこにも正味の電流は残らない．したがって，磁場をかけても金属は磁化しないことになる．



では，実際の金属が磁化することは，どのように説明されるだろうか．上では，電子の運動がニュートン力学に従うと考えた．実際には，電子のようなミクロな粒子の運動は量子力学に従う．量子力学によると，粒子の運動に量子化が起こり，決められた条件を満たす運動だけが実現する．磁場中の電子の運動の場合には，円運動の半径がとびとびの値しかとりえず，また図の電子bのような運動は許されない．この量子力学の効果によって，表面付近での電流の打ち消しあいが不完全になり，金属には弱い磁化が生じることになる．このように，物質の磁化には量子力学の効果が基本的な役割を果す．

らない．すなわち，微分形で書いたアンペールの法則(6. 38)は

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\}$$

となる．$\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})$ に(9. 31)式を用い，この項を左辺に移すと，

$$\nabla\times\{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\} = \mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$$

となる．そこで，新しく

$$\boxed{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu_0}\{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\}} \tag{9.32}$$

というベクトルを定義すると，上の関係は

$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})} \tag{9.33}$$

と書き換えられる．

(9. 33)式が物質中におけるアンペールの法則である．$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は，磁化ベクトルの存在しない真空中では(6. 20)式と一致し，物質中における磁場の強さを表わす．このように $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を補助的な場として導入すると，それは(9. 33)式によって電荷の移動による電流 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ と直接関係づけられる．これは物質中の静電場の場合に，電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ を(9. 8)式によって導入すると，それが(9. 9)式によって真電荷 $\rho(\boldsymbol{r})$ と関係づけられたことと同じ事情である．ここでは，磁場における $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ が，電場における $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ と同じ役割を果している．(9. 33)式を積分形に書くと，

$$\boxed{\int_C \{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds = \int_S \{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\,dS} \tag{9.34}$$

となる．式の意味は，積分形に書いた真空中のアンペールの法則(6. 37)と同じである．

磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に対するガウスの法則は，遊離した磁荷が存在しない限り，物質があっても成り立つ．微分形では

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0} \tag{9.35}$$

また，積分形では

$$\int_S \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\}\,dS = 0 \tag{9.36}$$

となる．(9.33)式と(9.35)式，または(9.34)式と(9.36)式が物質中における静磁場の基本法則である．

磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$と磁場の強さ$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$との関係は，一般には(9.32)式で与えられるが，具体的には物質によって異なる．誘電体では，電場があまり強くなければ分極ベクトルは(9.11)式のように電場に比例すると考えてよかった．磁性体の場合も，強磁性体でないふつうの磁性体では，磁場がそれほど強くない限り，磁化ベクトルはかけられた磁場に比例する．そこで，

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{9.37}$$

と表わし，比例定数χ_{m}を**磁化率**(magnetic susceptibility)という．磁化率は物質の種類，温度などの物質のおかれている条件によって決まる定数である．誘電体の感受率はつねに正であるが，磁化率は常磁性体では正，反磁性体では負になる．(9.37)式を(9.32)式に代入すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= (\mu_0+\chi_{\mathrm{m}})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\\ &= \mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{9.38}$$

となる．磁束密度と磁場の強さを関係づける係数

$$\mu = \mu_0+\chi_{\mathrm{m}} \tag{9.39}$$

を**透磁率**(magnetic permeability)という．誘電体では，物質の誘電率εはいつも真空の誘電率より大きい．磁性体の場合には，χ_{m}が負にもなりうるので，物質のμは真空のμ_0より大きいとは限らない．ふつうの物質では，χ_{m}はμ_0よりずっと小さく，物質のμはμ_0に近い値をとる．

強磁性体でも，磁場が十分弱いときには，(9.37)の比例関係が成り立つ．しかし，ある程度磁場が強くなり，すべての磁区の磁気双極子モーメントが1方向に揃ってしまうと，あとはいくら磁場を強くしても磁化ベクトルはそれ以上大きくなりえない．磁化ベクトルは一定値に近づき，磁場との比例関係は成り

立たなくなる．永久磁石では，磁場が作用しなくても磁化ベクトルは存在するわけで，比例関係ははじめから成り立っていない．

ここで磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ の定義について，若干の補足をしたい．$\boldsymbol{M}$ は単位体積当りの磁気双極子モーメントであるが，双極子モーメントについては(6.26)とは異なる，この式から μ_0 を除いた定義もある(I, 166ページ)．この場合には磁化ベクトルも $\boldsymbol{M}/\mu_0$ をあらためて $\boldsymbol{M}$ と置くことになる．これを本書の $\boldsymbol{M}$ と区別するために $\boldsymbol{M}'$ と書けば，$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{M}'$ を結ぶ関係は，(9.32)のかわりに，

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{M}'(\boldsymbol{r}) \tag{9.32$'$}$$

となる．この書き方をすれば，(9.8)と比べて6-5節で述べた電場と磁場の対応関係 $\boldsymbol{E}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}\leftrightarrow\boldsymbol{H}$ が，$\boldsymbol{P}\leftrightarrow-\boldsymbol{M}'$, $\varepsilon_0\leftrightarrow 1/\mu_0$ として成り立つ．

問　題

1. 原子が磁気双極子モーメントをもつ常磁性体の磁化率は，分子が電気双極子モーメントをもつ誘電体の場合(9-2節問題2)と同じように考えればよい．ただし，その(1)式の電気双極子モーメント p は原子の磁気双極子モーメント p_{m} で置き換える．p_{m} の大きさは，水素原子中の電子の円運動について求めた値(6-7節問題2)とほぼ同じ 10^{-29} Wb·m の程度である．双極子モーメントをもつ原子の平均間隔を5Åとして，この磁性体の透磁率の真空の透磁率 μ_0 からのはずれを見積り，それが μ_0 に比べて十分小さいことを示せ．

9-7　静磁場の境界条件

一様な物質中の静磁場の問題では，(9.37)の比例関係が成り立つ場合には，真空中で得られた結果が，透磁率を μ_0 から μ に置き換えるだけでそのまま成り立つ．たとえば，コイルに透磁率 μ の磁性体を挿入すると，コイルの内部に生じる磁束密度は(6.41)式により

$$B = \mu n I$$

となり，真空の場合の μ/μ_0 倍になる．

磁場が時間的に変動する場合には，次章でみるように，(9.37)の関係がいつでも静磁場の場合とまったく同じに成り立つとは限らない．しかし，変動が十分ゆるやかなときは成り立つと考えてよく，物質がある場合の電磁誘導の現象についても，7章の結果が μ_0 を μ に置き換えることでそのまま成り立つ．たとえば，7-6節の例題1で求めた2つのコイルの相互インダクタンスは，コイルに透磁率 μ の磁性体を挿入することにより，

$$M = \mu n_1 n_2 l_2 S_1$$

となる．μ の大きな磁性体を使うと，2つのコイルの結合を強めることができる．

物質が一様でないときには事情が複雑になる．とくに物質の境界面では，物質の性質が不連続に変わるので，注意を要する．同じ事情は静電場の場合にもあり，物質の境界面での静電場の境界条件は9-3節で求めた．静磁場の境界条件もまったく同じようにして求めることができる．境界面の上を電流が流れていないとすれば，積分形のアンペールの法則(9.34)で経路 C を境界面の付近にとれば，式の右辺は0としてよい．すなわち

$$\int_C \{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\}\,ds = 0$$

が成り立つ．これを図9-6の経路に適用すると，電場について(9.22)式を得たときと同様にして，

$$\boxed{\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}} \tag{9.40}$$

が得られる．また，ガウスの法則(9.36)を図9-7の閉曲面に適用すると，電場における(9.23)式と同様に，

$$\boxed{\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}} \tag{9.41}$$

が成り立つことがわかる．物質の境界面で，磁束密度についてはその法線成分が，磁場の強さについてはその接線成分が連続になる．

逆にいえば，一般に磁束密度の接線成分は連続にならない．これは，物質の性質が不連続に変わるところでは磁化ベクトルも不連続に変わり，その結果境

界面上に磁化電流が流れるからである．6-9 節の例題 1 でみたように，面上に電流が流れていると，その両側で磁束密度の接線成分が不連続になる．

例題 1　広い平面板を，面に垂直に一様に磁化させた板磁石がある．この磁石によって生じる磁場はどのようになるか．

［解］　対称性から明らかなように，磁場は面に垂直に生じる．磁束密度と磁場を真空中で B_1, H_1，磁石の中で B_2, H_2，磁石の磁化を M(いずれも上向きを正)とすれば，境界条件(9.41)により

$$B_1 = B_2 \equiv B$$

したがって，(9.32)式により

$$H_1 = \frac{1}{\mu_0}B, \qquad H_2 = \frac{1}{\mu_0}(B-M)$$

となる．磁石の磁化 M と無関係に一様に存在する磁束密度 B は，存在するとすれば磁石以外の原因によって生じたものと考えられる．磁石のほかに磁場のもとがないとすれば，$B=0$ である．したがって

$$H_1 = 0, \qquad H_2 = -\frac{1}{\mu_0}M \tag{9.42}$$

となる．真空中に磁場は存在せず，磁石の中の磁場の強さは磁化と逆向きになる(図 9-14)．▌

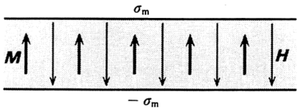


図 9-14　一様に磁化した板磁石による磁場.

この例題は，板磁石の両面に磁荷が生じていると見なせば，2 枚の平行な平面上に一様に分布した正負の磁荷による磁場を求める問題になる．磁荷を電荷に置き換えれば，これは平行板コンデンサーの問題(4-6 節例題 1)にほかならない．平行板コンデンサーの電場は，極板間の空間にだけ一様に生じた．それと同じように，板磁石の磁場は磁石の内部にのみ生じている．(9.42)式と(4.1)式との比較から，面に垂直な磁化 M によって生じる表面磁荷密度 σ_m は

$$\sigma_{\mathrm{m}} = M \tag{9.43}$$

になることがわかる.

棒磁石の場合にも，両端に正負の磁荷が生じているとして見れば，それによる磁場がどのようになるかがわかる．図 9-15 に棒磁石による磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の様子を，磁力線によって示した.

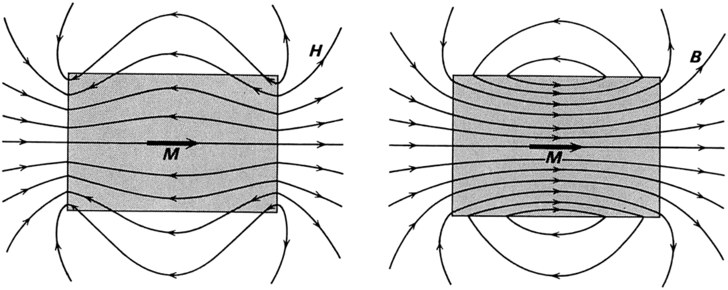
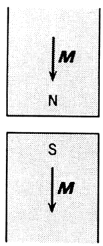


図 9-15 棒磁石による磁場と磁束密度.

問　題

1. 図のように，一様な磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ をもつ 2 本の棒磁石の N 極と S 極を近づけたとき，隙間に生じる磁場の磁束密度はいくらか．磁石の中で原子の磁気双極子モーメントが完全に 1 方向に揃っているとすれば，磁束密度は何 T になるか．ただし，単位体積中の原子数を 3×10^{28} 個 (m^{-3})，1 個の原子の双極子モーメントを $p_{\mathrm{m}}\cong1.2\times10^{-29}$ Wb·m とする.



問題 1

2. 問題 1 において，磁極の間にはたらく力を求めよ．ただし，磁極の面積を $10\ \mathrm{cm}^2$ とする.

3. 磁化率が $-\mu_0$ で，物質内部の磁束密度がつねに 0 になっている‘完全反磁性体’がある（301 ページのコーヒー・ブレイク「超伝導」参照）．真空中の磁束密度のこの物質の表面における境界条件はどのようになるか．また，一様な磁場中に球形の完全反磁性体をおいたときの磁束密度の様子を描け.

10

変動する電磁場と物質

物質中で電磁場が時間的に変動する場合も，物質中で定義された電束密度と磁場の強さを使って表わせば，マクスウェルの方程式は真空中と同じ形になる．しかし，電場と電束密度との関係は単純でなく，電場の変動する速さによって変わる．そのため，物質中の電磁波の伝わり方は真空中と異なり，波の分散や減衰が起こる．とくに金属中では，電流が流れるためにエネルギーの吸収が大きく，電磁波は強く減衰する．

10-1　物質中のマクスウェルの方程式

前章では，物質に静電場，静磁場がかかると，物質中の電荷，電流の分布が変化し，それによって分極，磁化が生じることを示した．しかし，物質中の電束密度 $\boldsymbol{D}$，磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ をそれぞれ(9.8), (9.32)式によって新しく定義しなおすと，静電場，静磁場の基礎方程式は真空中の式と同じ形になる．それでは，物質に変動する電磁場がかかったとき，物質中のマクスウェルの方程式はどのようになるだろうか．

電磁場が時間変化すると，それによって生じる物質の分極ベクトルや磁化ベクトルも時間変化する．このとき，分極に伴う分極電荷や磁化に伴う磁化電流は，各時刻における分極ベクトル，磁化ベクトルによって定まると考えてよい．すなわち，(9.7), (9.31)式により

$$\rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}, t) = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.1}$$

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.2}$$

しかしここで，1つ新しい事態が生じる．それは分極ベクトルの時間変化に伴い，電流が流れることである．9-2節と同じように誘電体の分極を電荷シートの模型で考えるなら，分極の時間変化はシートの変位 $\boldsymbol{u}$ の時間変化を意味する．密度 ρ の電荷が速度 $d\boldsymbol{u}/dt$ で運動すると，そこには電流密度

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}} = \rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

が生じる．分極ベクトルは $\boldsymbol{P}=\rho\boldsymbol{u}$ と表わされるから，分極ベクトルで書くと

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\partial\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{10.3}$$

となる．これを分極電流と呼ぼう．

マクスウェルの方程式(8.15)～(8.18)のうち，ガウスの法則(8.15)に対しては，分極電荷(10.1)の寄与を加えなければならない．すなわち

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \rho(\boldsymbol{r}, t)+\rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}, t)$$

$$= \rho(\boldsymbol{r}, t) - \nabla\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)$$

右辺の第 2 項を左辺に移して，静電場の場合と同様に

$$\nabla\cdot[\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)] = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{10.4}$$

を得る．

(8.17)式は磁化電流(10.2)と分極電流(10.3)を加えて，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) - \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} &= \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)+\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}, t)+\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}, t)\\ &= \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)+\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)+\frac{\partial\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

となる．この式は磁化電流，分極電流を左辺に移して

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)] - \frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)] = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.5}$$

とまとめられる．(8.16), (8.18)式にはつけ加えるものがなく，このまま物質中でも成り立つ．

(10.4), (10.5)式を見ると，電磁場が変動するときも静電場，静磁場の場合と同じように，物質中の電束密度，磁場の強さをそれぞれ

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.6}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\mu_0}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)] \tag{10.7}$$

と定義すれば，マクスウェルの方程式はふたたびもとの形に戻ることがわかる．すなわち，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ および新しく定義された $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ に対して，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \rho(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{10.9}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.10}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = 0 \tag{10.11}$$

となる．

ここで(10.10)式の変位電流の項 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ には，分極に伴う電流 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}$ が含まれていることに注意したい．この電流は電荷の自由な運動によってではなく，電荷シートの変位によって生じたものである．マクスウェルがこの項を変位電流と呼んだとき，彼は真空がある種の物質(エーテル)に満たされていると考えていた．そして，電場があるときには真空中でもその物質に一種の分極が生じており，変位電流はその分極の運動によって生じると考えたのである．変位電流という呼び名は，そのような考え方に由来している．

静電場，静磁場では，多くの場合分極ベクトルと電場，磁化ベクトルと磁場との間に，(9.11), (9.37)の比例関係が成り立つと考えることができた．電磁場が時間変化する場合にも，同じように

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) = \chi_{\mathrm{e}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.12}$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t) = \chi_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.13}$$

と置くことができるなら，真空中と物質中との違いは，静電場，静磁場の場合と同様，単に誘電率，透磁率を ε_0, μ_0 からそれぞれ

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_{\mathrm{e}} \tag{10.14}$$

$$\mu = \mu_0 + \chi_{\mathrm{m}} \tag{10.15}$$

に置き換えるだけのことになる．

しかし，(10.12), (10.13)の関係はいつでも成り立つとは限らない．たとえ話になるが，社会の変動が激しいときに，それに速やかについていける人と変動からとり残されてしまう人とがあるものだ．それと同じように物質でも，電磁場の変動が速すぎるとそれについていけない場合が起こるのである．

10-2　誘電体中の振動電場

誘電体では，電子は各分子に強く束縛されている．電場がかかっても，電子は分子の中を少し移動することはできるが，分子から離れることはできない．分子の中の電子の運動では量子力学の効果が重要で，厳密にいえばそれをニュートン力学によって扱うことは許されない．しかし，そのおおよその性質を知

るために，図10-1のように，電子をバネの力で分子に結びつけられた古典的な粒子と見なし，振動する電場がかかったときの運動を考えてみよう．

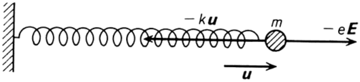


図10-1 分子に束縛された電子のモデル．

分子の中での電子の変位を $\boldsymbol{u}$ とし，電子には変位に比例する‘バネの力’ $-k\boldsymbol{u}$ がはたらくものとすれば，電場がかかっていないときの電子の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}+k\boldsymbol{u}=0 \tag{10.16}$$

となる．力学で学んだように，このとき電子は固有振動数

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10.17}$$

の単振動をする．電場 $\boldsymbol{E}$ がかかると，電子には $-e\boldsymbol{E}$ の力がはたらくから，電子の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}+k\boldsymbol{u}=-e\boldsymbol{E} \tag{10.18}$$

となる．この方程式は，(7.32)，(7.33)式で $R=0$ とおいたものと同じ形をしている．したがって，振動電場がかかったときの電子の運動は，抵抗のないコンデンサーとコイルだけの交流回路の電気振動と同じになる．

電場が角振動数 ω で振動すると，電子の運動も同じ角振動数の振動になるであろう．そこで，電場と変位をそれぞれ

$$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E}_0\cos\omega t \tag{10.19}$$

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}_0\cos\omega t \tag{10.20}$$

とおく．これを(10.18)式に代入すると，

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}(t)}{dt^2}=-\omega^2\boldsymbol{u}(t)$$

の関係を使って，

$$(-m\omega^2+k)\boldsymbol{u}(t) = -e\boldsymbol{E}(t)$$

となる．したがって，k を(10.17)式により固有振動数 ω_0 を用いて表わし，

$$\boldsymbol{u} = \frac{-e}{m({\omega_0}^2-\omega^2)}\boldsymbol{E} \tag{10.21}$$

が得られる．

電場に引かれて分極を起こす電子が各分子に z 個ずつあるとすれば，1個の分子に生じる電気双極子モーメントは

$$\boldsymbol{p} = -ze\boldsymbol{u} \tag{10.22}$$

である．(10.21)式の結果を用いると，

$$\boldsymbol{p} = \alpha(\omega)\boldsymbol{E} \tag{10.23}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{ze^2}{m({\omega_0}^2-\omega^2)} \tag{10.24}$$

となる．$\alpha(\omega)$ が角振動数 ω の電場に対する分子の分極率である．静電場に対する分極率 α については 9-1 節で論じたが，このモデルでは(10.24)式で $\omega=0$ とおいて，

$$\alpha = \frac{ze^2}{m{\omega_0}^2} \tag{10.25}$$

となる．

分子の分極率 $\alpha(\omega)$ は，電場の角振動数 ω の関数として，図 10-2 のように振舞う．注目されることは，第1に ω が固有振動数 ω_0 に近づくと，分極率が非常に大きくなることである．振動子に，その固有振動数に近い振動数の力を加えると，共鳴が起きて，振動子は大きな振幅で振動する．ここでも，電子の運動に共鳴が起きて，分極率が大きくなるのである．第2に，ω を大きくすると分極率は0に近づく．これは，電場の変動が速すぎると，電子はそれについていけなくなることを示している．

9-2 節で述べたように，物質中で分子が感じる電場とマクロな電場とは，一般に同じものではない．しかし，その差が無視できるとすれば，マクロな誘電体の分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ は，単位体積中の分子数を N として

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = \chi_{\mathrm{e}}(\omega)\boldsymbol{E} \tag{10.26}$$

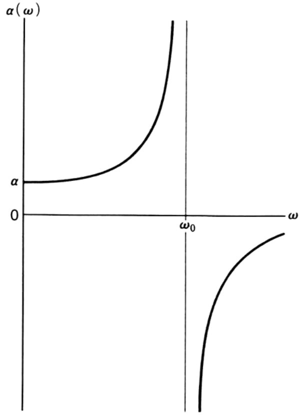


図 10-2　分子の分極率の角振動数依存性.

$$\chi_e(\omega) = \frac{Nze^2}{m(\omega_0{}^2 - \omega^2)} \tag{10.27}$$

となる．$\boldsymbol{E}$ はマクロな電場と見なしてよく，$\chi_e(\omega)$ は角振動数 ω の電場に対する電気感受率である．誘電率は(10.14)式により

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon_0 + \chi_e(\omega) \\ &= \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m(\omega_0{}^2 - \omega^2)}\end{aligned} \tag{10.28}$$

となる．電気感受率も誘電率も電場の角振動数に依存する．

$\chi_e(\omega)$ や $\varepsilon(\omega)$ の ω 依存性も図 10-2 と同じようになり，ω が固有振動数 ω_0 に近づくと無限大になる．もちろん，実際の物質ではこのようなことは起きない．現実の振動子で共鳴が起きても振幅が無限大にならないのは，振動子に摩擦力がはたらいて，それが振動を抑える役割をするからである．ミクロな電子の振動子でも，分子内で電子にある種の摩擦力がはたらくと考えられる．摩擦力が電子の速度に比例し，$-\gamma d\boldsymbol{u}/dt$ と表わされるとすれば，$\gamma = m/\tau$ とおいて電子の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2} + \frac{m}{\tau}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + k\boldsymbol{u} = -e\boldsymbol{E} \tag{10.29}$$

となる．この式は，抵抗も含む交流回路の方程式(7.32)，(7.33)式と一致する．

交流回路の問題を解く場合には，電位差や電流を複素数で表わす方法が便利であった(7-10 節). (10.29)式を解くときにも同じ方法を用いることができる. 電場も変位も角振動数 ω で振動するとして,

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t+\alpha) \tag{10.30}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_0 \cos(\omega t+\beta) \tag{10.31}$$

とおく. 今度は両者の位相が一致しなくなるので，$\alpha=\beta=0$ とおくことはできない. ここで, (7.40)～(7.42)式と同じように，この $\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{u}(t)$ に対応して複素数の関数

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t+\alpha)} = \tilde{\boldsymbol{E}} e^{i\omega t}, \qquad \tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\alpha} \tag{10.32}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}_0 e^{i(\omega t+\beta)} = \tilde{\boldsymbol{u}} e^{i\omega t}, \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_0 e^{i\beta} \tag{10.33}$$

を導入する. $\tilde{\boldsymbol{E}}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ の実数部が，物理的に意味のある電場と変位(10.30), (10.31)式になる. (10.32), (10.33)式を(10.29)式の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{u}$ に代入して計算すると,

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \frac{-e}{m({\omega_0}^2-\omega^2+i\omega/\tau)} \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{10.34}$$

が得られる(問題 1).

(10.32), (10.33)式と同じように，分極ベクトルと電束密度も複素数にすると，(10.21)式から(10.26)～(10.28)式を得たときと同じようにして，最終的に

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \tilde{\chi}_{\mathrm{e}}(\omega) \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{10.35}$$

$$\tilde{\boldsymbol{D}} = \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{10.36}$$

$$\tilde{\chi}_{\mathrm{e}}(\omega) = \frac{Nze^2}{m({\omega_0}^2-\omega^2+i\omega/\tau)} \tag{10.37}$$

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m({\omega_0}^2-\omega^2+i\omega/\tau)} \tag{10.38}$$

が得られる. 誘電率も複素数になることに注意したい.

誘電率を実数部と虚数部に分けると,

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon(\omega) + i\varepsilon'(\omega) \tag{10.39}$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m}\frac{{\omega_0}^2-\omega^2}{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2} \tag{10.40}$$

$$\varepsilon'(\omega) = -\frac{Nze^2}{m}\frac{\omega/\tau}{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2} \tag{10.41}$$

となり，おのおのの角振動数依存性は図10-3のようになる．今度はωが固有振動数ω_0に一致しても，誘電率は無限大にならない．かわりにそこで虚数部が大きくなる．また角振動数ωが十分小さく$\omega \ll \omega_0$のとき，虚数部は小さく，実数部は静電場に対する誘電率εに近づく．

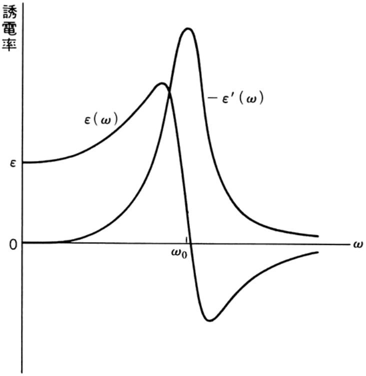


図10-3　誘電率の実数部$\varepsilon(\omega)$，虚数部$\varepsilon'(\omega)$の角振動数依存性.

例題1　電気感受率，誘電率が(10.37),(10.38)式のように複素数になるとき，電場が誘電体の電子に対して行なう仕事を求めよ．

［解］　電気感受率と電場を(10.39)と同じように実数部と虚数部に分け，

$$\tilde{\chi}_e(\omega) = \chi_e(\omega) + i{\chi_e}'(\omega)$$
$$\tilde{\boldsymbol{E}}(t) = \boldsymbol{E}(t) + i\boldsymbol{E}'(t)$$

と表わすと，分極ベクトル(の実数部)は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(t) &= \mathrm{Re}\,\{\tilde{\chi}_e(\omega)\tilde{\boldsymbol{E}}(t)\}\\ &= \mathrm{Re}\,\{[\chi_e(\omega)+i{\chi_e}'(\omega)][\boldsymbol{E}(t)+i\boldsymbol{E}'(t)]\}\end{aligned}$$

$$= \chi_e(\omega)\boldsymbol{E}(t) - \chi_e'(\omega)\boldsymbol{E}'(t)$$

となる．分極の時間変化に伴う分極電流は(10.3)式で与えられる．(10.32)式により

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t+\alpha), \qquad \boldsymbol{E}'(t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t+\alpha)$$

だから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_p(t) &= \frac{\partial \boldsymbol{P}(t)}{\partial t} \\ &= -\omega\chi_e(\omega)\boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t+\alpha) - \omega\chi_e'(\omega)\boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t+\alpha)\end{aligned}$$

となる．このとき，電場が電荷に対して行なう仕事は，(5.16)式により誘電体の単位体積，単位時間当りで

$$\begin{aligned}W &= \boldsymbol{i}_p(t)\cdot\boldsymbol{E}(t) \\ &= -\omega\chi_e(\omega)E_0^2 \sin(\omega t+\alpha)\cos(\omega t+\alpha) \\ &\quad -\omega\chi_e'(\omega)E_0^2\cos^2(\omega t+\alpha)\end{aligned}$$

となる．第1項は時間とともに正負に振動するから，振動の1周期について平均すると消える．これに対し，第2項を1周期 $T=2\pi/\omega$ について平均すると，

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\alpha)dt = \frac{1}{2}$$

となるので，電場の行なう平均の仕事は

$$\begin{aligned}\overline{W} &= \frac{1}{T}\int_0^T W dt \\ &= -\frac{1}{2}\omega\chi_e'(\omega)E_0^2\end{aligned} \qquad (10.42)$$

と得られる．(10.37)式からわかるように χ_e' は負になるから，$\overline{W}$ は正である．▌

電場は誘電体に対し単位体積，単位時間当り(10.42)式だけの仕事をする．これだけのエネルギーが誘電体に吸収されるといってもよい．エネルギーの吸収が $\tilde{\chi}_e(\omega)$ の虚数部によっていることに注意しよう．(10.27)式のようにそれが実数のときは吸収が起きない．分子内で電場によって加速された電子の運動エネルギーが，摩擦によって熱になり，エネルギーの吸収が起きると考えればよ

い．吸収は共鳴点 $\omega=\omega_0$ で大きくなる．

もちろん，実際の物質中の電子の運動はこのように単純ではない．電子の固有振動数はその状態によって異なるので，物質の誘電率は(10.38)式をいろいろな ω_0 について加え合わせた形になる．しかし，振動数が十分低いときには静電場に対する誘電率 ε で近似してよいこと，一般には振動数に依存して複素数になり，エネルギーの吸収が起こることに変わりはない．

磁性体の磁化率や透磁率も，振動する磁場に対しては振動数依存性を示す．しかし，強磁性体以外のふつうの物質では χ_{m} は μ_0 に比べて非常に小さく，それが振動数に依存しても物質の電磁気的な性質にはほとんど影響しないと考えてよい．

問　　題

1. 誘電体分子内の電子に振動電場がかかったときの運動方程式(10.29)を複素数を用いて解き，(10.34)式を導け．

2. 9-1 節問題 1 で扱った原子のモデルにおいて，電子が分布の半径 a，分布密度を一定に保ったまま原子核のまわりを振動するとき，その固有振動数を求めよ．ただし原子番号を Z とし，原子核の電荷を $q=Ze$，電子の総質量を Zm とする．炭素原子 ($Z=6$) の場合，$a=0.7$ Å とすれば，固有振動数はいくらか．

3. 静電場に対する比誘電率が 4.5，固有振動数が $1.0\times10^{16}\ \mathrm{s^{-1}}$ の誘電体がある．角振動数 $2.5\times10^{15}\ \mathrm{s^{-1}}$(赤い光)，$4.5\times10^{15}\ \mathrm{s^{-1}}$(青い光)の振動電場に対する比誘電率を求めよ．ただし，‘摩擦力’は無視する．

10-3　誘電体中の電磁波

前節で見たように，物質に時間変化する電磁場がかかるときにも，変動があまり速くなければ，誘電率，透磁率として静電場，静磁場に対するものを用いることが許される．このような場合には，誘電体中の電磁波の伝播を記述する波動方程式は，電場について書くと真空中の(8.65)式で ε_0, μ_0 を ε, μ に置き換えて，

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0} \tag{10.43}$$

となる．ただし，

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \tag{10.44}$$

は誘電体中の光の速さである．その真空中の光速 c との比

$$\boxed{n = \frac{c}{v}} \tag{10.45}$$

をその物質の**絶対屈折率**(absolute refractive index)という．物質の誘電率 ε は真空の誘電率 ε_0 より大きく，μ と μ_0 はほとんど等しい．したがって，光速は物質中の方が真空中より遅く，絶対屈折率は 1 より大きな定数になる．いろいろな物質の屈折率を表 10-1 に示した．

表 10-1　種々の物質の絶対屈折率
(波長 5.89×10^{-7} m の光に対する値．気体は 0°C，1 気圧，液体および固体は 20°C の場合)

	物質	屈折率
気体	空気	1.00029
	水蒸気	1.00025
液体	水	1.333
	グリセリン	1.473
固体	石英ガラス	1.458
	ダイヤモンド	2.419

例題 1　絶対屈折率が n_1, n_2 の 2 つの誘電体 1, 2 が平面で接している．図 10-4 のように，平面波の電磁波が 1 から 2 へ斜めに入射したとき，入射波，屈折波の進行方向と境界面の法線とのなす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とすれば，

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{10.46}$$

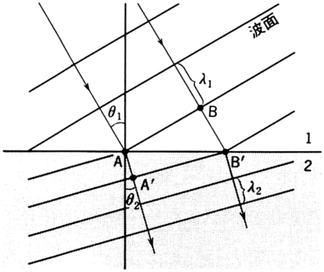


図 10-4 誘電体1から2へ入射した電磁波の屈折.

となることを示せ(**屈折の法則** law of refraction).

［解］ 入射した電磁波の波面ABは1周期ののちには誘電体2に入ってA′B′に達する. BB′, AA′はそれぞれ誘電体1, 2の中における波長である. 誘電体中1, 2の光速をそれぞれ v_1, v_2, 電磁波の角振動数を ω とすれば,

$$\mathrm{BB'} = \lambda_1 = \frac{2\pi v_1}{\omega}, \qquad \mathrm{AA'} = \lambda_2 = \frac{2\pi v_2}{\omega}$$

また, 図からわかるように

$$\mathrm{BB'} = \mathrm{AB'} \sin\theta_1, \qquad \mathrm{AA'} = \mathrm{AB'} \sin\theta_2$$

の関係があるから,

$$\frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

となる. 光速と屈折率の間には $v_1=c/n_1$, $v_2=c/n_2$ の関係があるから, (10.46)式の屈折の法則が得られる. n_2/n_1 を物質2の1に対する**相対屈折率**(relative refractive index)という. ▌

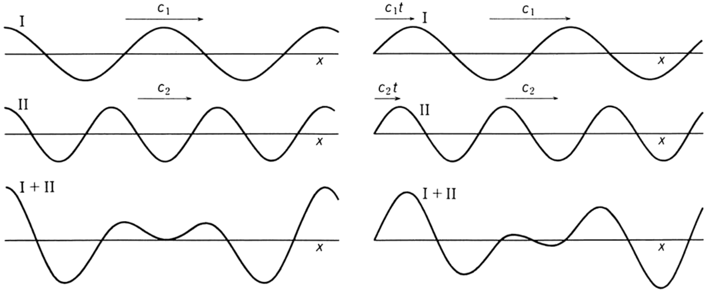
電磁場の変動が速くなると, 誘電率の振動数依存性が重要になる. このような場合には, エネルギーの吸収は無視したとしても, (10.43)式のような波動方程式は一般には成り立たない. しかし, 一定の振動数で振動する電磁場に対しては, エネルギーの吸収を無視すれば, 誘電率を振動数に依存する実数の誘電率 $\varepsilon(\omega)$ で置き換えればそれでよい. すなわち, 振動数 ω で振動する電場 $\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r}, t)$ の満たす波動方程式は

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v_\omega{}^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{10.47}$$

$$v_\omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu}} \tag{10.48}$$

となる．光速は振動数に依存するようになる．

真空中の波動方程式(8.65)では，(8.57)式のように任意の形をした波がそのまま形を変えずに伝播することができた．一般に，任意の形の波は正弦波の重ね合わせとして表わすことができる．たとえば，図10–5(a)にI+IIと記した波は図のI，IIの2つの正弦波の重ね合わせである．この波長，振動数の異なる2つの正弦波が同じ速さで伝播すれば，それが重ね合わされた波も形を変えずに同じ速さで伝播する．真空中では光速が振動数によらないから，任意の形の波の伝播が可能であった．しかし，物質中では光速が振動数に依存するので，正弦波ごとに進み方が異なり，図10–5(b)のように時間とともに位相がずれて波の形が変わってしまう．波の伝わる速さが振動数によるために生じるこのような現象を，波の**分散**(dispersion)という．



(a) 時刻 0　　　　(b) 時刻 t

図10–5　波長の異なる2つの波の重ね合わせによって生じる波．波長によって波の伝わる速さが異なると，時間がたつとともに2つの波の位置関係が変化し，重ね合わせた波の形が変わる．

物質中の光速は振動数に依存するから，屈折率も振動数による．(10.46)式による屈折の仕方が振動数によるわけで，太陽の光をプリズムに通したとき，

光が色によって分かれるのはこのためである．これも波の分散現象の一種である．

前節でみたように，物質中では(10.42)式のような電場からのエネルギーの吸収も起こる．物質中を電磁波が伝わるときエネルギーの吸収が起これば，電磁波はエネルギーを失い，次第に減衰する．減衰がもっとも著しいのは導体の中である．次節では，導体中の電磁波の伝播の問題を考える．

問　題

1. 10-2 節問題 3 で扱った物質の，赤い光および青い光に対する屈折率を求めよ．白色光がこの物質の平らな表面に面の法線と 30° の角度で入射したとき，屈折により赤い光と青い光はどのように分散するか．

10-4　導体と電磁波

導体中の電磁波を取り扱うには，マクスウェルの方程式に電場によって生じる電流の項を取り入れなければならない．8-5 節と同じように，電場が x 方向，磁場が y 方向を向き，z 方向に伝播する平面波を考える．場の量はすべて z と t のみの関数になるとして，(10.11)式の y 成分，(10.10)式の x 成分から，

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}+\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t}=0 \qquad (10.49)$$

$$-\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z}-\varepsilon\mu\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}=\mu i_x(z,t) \qquad (10.50)$$

が得られる．導体中でも伝導電子以外の電子は誘電体の電子と同じように原子に束縛されており，電磁場がかかると分極と磁化に寄与する．そこで，導体中の誘電率，透磁率を，真空中の値と異なるとして，ε, μ と書いた．

電場が振動するときには，10-2 節で見た誘電体の電気感受率(10.37)と同じように，導体の電気伝導度も振動数に依存する(問題 2)．しかしここでは，電磁場の振動数があまり高くないとして，電気伝導度の振動数依存性は無視でき

るとしよう．そうすると，電流密度は静電場に対する電気伝導度 σ を用いて

$$i_x(z,t) = \sigma E_x(z,t) \tag{10.51}$$

と書かれる．

(10.51)式を(10.50)式に代入した上で，(10.49)式を z で，(10.50)式を t で偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial z \partial t} = 0$$

$$-\frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial t \partial z} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}$$

となる．この2式から B_y を消去すると，電場に対する方程式として

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{10.52}$$

が得られる．左辺の第3項が，導体中であるために現われた項である．

(10.52)式を解く場合，10-2節で(10.29)式を解いたときと同じように，複素数を用いる方法が便利である．すなわち，振動する電場を複素数で表わしたものを $\tilde{E}_x(z,t)$，電磁波の角振動数を ω として

$$\tilde{E}_x(z,t) = \tilde{E}(z) e^{i\omega t} \tag{10.53}$$

とおく．前と同様，$\tilde{E}_x(z,t)$ の実数部が物理的に意味のある電場である．

$$\frac{\partial \tilde{E}_x(z,t)}{\partial t} = i\omega \tilde{E}(z) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_x(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \tilde{E}(z)^{i\omega t}$$

となるので，(10.53)式を(10.52)式に代入し，全体から時間変化する因子 $e^{i\omega t}$ を落とすことにより，$\tilde{E}(z)$ に対する方程式

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}(z)}{\partial z^2} + (\varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega)\tilde{E}(z) = 0 \tag{10.54}$$

が得られる．

導体中でなければ，$\sigma=0$ だから第2項の係数は実数になる．そのときの解は簡単で，実数の k で

$$\tilde{E}(z) = E_0 e^{-ikz} \tag{10.55}$$

と表わされる．(10.55)式を(10.54)で $\sigma=0$ とおいた式に代入すればわかるように，k が

$$k = \pm\frac{\omega}{v}, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{10.56}$$

であれば，たしかに(10.55)式は(10.54)式を満たしている．ここで，v はこの物質中の光速である．(10.55)式を(10.53)式に代入して実数部をとれば

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \mathrm{Re}\,\{\tilde{E}(z)e^{i\omega t}\} \\ &= E_0 \cos k(z \mp vt) \end{aligned} \tag{10.57}$$

となり，これは8-5節で求めた電磁波の式(8.53)に一致する．

ここでは，波数 k が複素数になることを許し，

$$\tilde{E}(z) = E_0 e^{-i\tilde{k}z} \tag{10.58}$$

とおいてみよう．この式を(10.54)式に代入すると

$$[-\tilde{k}^2 + (\varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega)]E_0 = 0 \tag{10.59}$$

となる．したがって，(10.58)式が $E_0 \neq 0$ の解であるためには(10.59)式の［ ］の中が0でなければならない．$E_0=0$ は電場がない場合を表わすから，これもマクスウェルの方程式の解になることは明らかだが，意味がない．［ ］の中を0とおいて，$\tilde{k}$ が

$$\tilde{k}^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega \tag{10.60}$$

と得られる．

ここで，(10.60)式の右辺の2つの項の大きさを比べてみる．もしも振動数があまり高くなくて，

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{10.61}$$

であれば，第1項は第2項よりずっと小さい．ふつうの金属の電気伝導度は，表5-1に示したようにおよそ $10^7\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ の程度である．ε は真空中の値とあまり違わないから，(1.5)式により $\varepsilon \sim 10^{-11}\ \mathrm{C}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ として，

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \cong 10^{18}\ \mathrm{s}^{-1}$$

となる．ふつうの電波($\omega \sim 10^4$–10^{10})や可視光($\omega \sim 10^{14}$)の場合には，(10.61)の条件が十分成り立っている．したがって，これらの場合には(10.60)式の第1項を無視してよい．すなわち，

$$\tilde{k}^2 \cong -i\mu\sigma\omega \tag{10.62}$$

となる．

この平方根をとるとき，$\sqrt{-i}$ の値を知らなければならない．一般に，複素数 w を(7.49)式のように絶対値 $|w|$ と位相 θ で

$$w = |w|e^{i\theta}$$

と表わすと，その平方根は

$$w^{1/2} = \pm|w|^{1/2}e^{i\theta/2}$$

となることがわかる．$w=-i$ のときは，$|w|=1$，$\theta=-\pi/2$ だから

$$\begin{aligned}\sqrt{-i} &= \pm e^{-i\pi/4} \\ &= \pm\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\end{aligned}$$

となる．この結果を用いて

$$\tilde{k} = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu\sigma\omega} \tag{10.63}$$

が得られる．複号のうち上を選び，(10.58)，(10.53)式に代入して実数部をとり，

$$E_x(z, t) = E_0\cos\left(\frac{z}{l}-\omega t\right)e^{-z/l} \tag{10.64}$$

$$l = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \tag{10.65}$$

を得る．

ここで得た結果は，平らな導体の表面に平面波の電磁波が入射したとき，それが導体の内部に入りこむ様子を示しているとみてよい．$z=0$ が導体の表面であるとし，$t=0$ における導体内部の電場の様子を示したのが，図10-6である．電場はほとんど振動せずに，l の数倍の程度の深さで事実上消えてしまう．

l は電磁波が導体内部に入りこむ距離の目安を与える．(10.65)式からわかるように，侵入の深さは振動数が高いほど短い．角振動数が $10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$ のマイクロ波の場合，l はおおよそ

$$l \cong \left(\frac{2}{4\times 3.14\times 10^{-7}\times 10^{7}\times 10^{10}}\right)^{1/2} \cong 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

となる．電磁波は 0.001 mm ほどしか導体内部に入ることができない．

このように，導体があると電磁波はその内部に入ることができないから，強く反射される．大気の上層には，空気が電離されて電気伝導性のよい状態になった層(電離層)が存在することが知られている．電離層は電波に対して導体の役割をするから，電波はそこで強く反射される．短波が地球の裏側にまで伝播するのは，この反射によるものである．このほか，導体があるときの電磁波の伝わり方は，マイクロ波の導波管の問題などでくわしく調べられている．

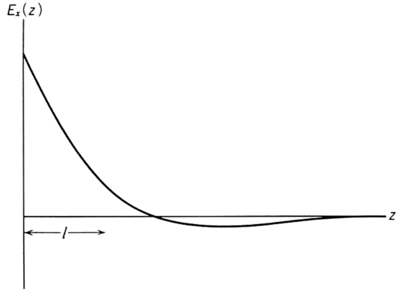


図 10-6　導体の表面付近における振動電場の空間変化．電場は l の程度の深さまでしか導体内部に入りこまない．

問　　題

1. 電気伝導度の小さな導体があり，角振動数 ω の電磁波に対して(10.61)式と逆の条件

$$\omega \gg \sigma/\varepsilon$$

が成り立っているとする．このとき，(10.60)式から $\tilde{k}$ を近似的に求め，導体内における電磁波の様子を調べよ．

2. 導体内の伝導電子は原子，分子に束縛されていないので，誘電体の電子と違って，変位してももとの位置に引き戻す‘バネの力’ははたらかない．速度に比例する‘摩擦力’がはたらくとすれば，振動する電場がかかったときの伝導電子の運動方程式は，電子の速度を $\boldsymbol{v}(t)$ として，

$$m\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}+\frac{m}{\tau}\boldsymbol{v}(t)=-e\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t+\alpha) \tag{1}$$

となる．電子の数密度を n とすれば，電流密度は

$$\boldsymbol{i}(t)=-ne\boldsymbol{v}(t) \tag{2}$$

となる．複素数を用いて(1)を解き，(2)により電流密度を求めよ．

さらに勉強するために

クーロンの実験に始まる電磁気現象の定量的な研究は，マクスウェルの理論によって古典電磁気学としての完成を見るにいたった．マクスウェル理論が存在を予言した電磁波がヘルツにより発見され，ファラデーの直感によって導入された電磁場が，実在としての地位を確立したのである．

理論の完成につづくものは，応用であった．電磁誘導を利用して発電された電気的エネルギーは，電流にはたらく力を用いたモーターによって機械を動かし，電車を走らせる．動力源・熱源・光源などとしての比較的単純な利用から，通信手段としての電磁波の利用などの高度なものまで，現代における電磁気の応用は広範で多岐にわたっている．

この本で私たちは，クーロンの法則に始まる電磁気の諸法則を電磁場の従う微分法則として定式化し，マクスウェルの方程式にいたる道筋をくわしくたどってきた．しかし，これで電磁気学がすべて終わったわけではない．私たちは力学でいえば，ニュートンの力学の法則がわかり，運動方程式をたてた段階にいるわけである．このあとには，理論の完成につづく広範な応用に対応して，電磁気学の法則を種々の具体的な場合に適用する問題が残されている．たとえば，7-9 節でごく簡単な場合について触れた振動電流の問題でも，コンデンサー，コイル，抵抗をいろいろに接続した，もっと複雑な交流回路を取り扱う必

要がある．電磁波の伝播の仕方を明らかにするには，マクスウェルの方程式を具体的な境界条件のもとで解かなければならない．これらの電磁気学の応用には，それぞれの場合に応じて進んだ数学的手段が必要になる．

この本でほとんど触れることのできなかった重要な問題の１つに，荷電粒子の運動と電磁場との相互作用の問題がある．力学で学んだように，粒子が互いに力を及ぼしながら運動するとき，粒子系の全エネルギーと全運動量が一定に保たれる．これが力学的エネルギーおよび運動量の保存則である．8-4 節で私たちは電磁場がそれ自身のエネルギーをもつことを見た．したがって，荷電粒子が電磁波を放射すると，電磁波がエネルギーを持ち去るので粒子はエネルギーを失う．この場合エネルギーの保存則は，粒子だけの系についてではなく，粒子と電磁場とを合わせた全系について成り立つ．じつは，運動量についても同じことがいえて，電磁場はエネルギーとともにそれ自身の運動量をもつと考えられる．粒子から放射された電磁波はエネルギーとともに運動量を持ち去るから，粒子系だけの運動量は保存されない．いいかえれば，電磁波を放射するとき電磁場から粒子に反作用の力がはたらき，粒子の運動量が変化するのである．このような荷電粒子と電磁場との相互作用の仕組みを見ると，電磁場が粒子すなわち物質と対等な，もう１つの実在であることはもはや疑う余地がない．

マクスウェルによる古典電磁気学の完成は 1873 年のことであるが，それは同時に 20 世紀に始まる新しい物理学の発展の第一歩であった．マクスウェルの方程式によると，電磁場の振動は秒速約 30 万 km で空間を伝播する．水面を伝わる波の場合には，波を追いかけて歩きながら見ると，波は実際より遅く伝わるように見え，逆方向に歩きながら見ると速く伝わるように見える．いいかえれば，水に対して静止して見る場合にのみ，波は前後左右に同じ速さで伝わるように見えるのである．電磁波の場合にも，それが空間を満たしたある種の媒質を伝わる波であるなら，その媒質に対して静止した観測者が見るときに限り，どの方向にも同じ秒速 30 万 km で伝わるように見えるだろう．地球は自転し，また太陽の回りを公転している．動く地球上で見れば，光の速さはその進む方向によって異なるに違いない．また，光速の方向による違いから，私

たちが電磁波の媒質に対してどのような速さで動いているかもわかるはずである．ところが，有名なマイケルソン(A. A. Michelson)とモーレー(E. W. Morley)の実験(1886年)は，地球上で光がどの方向にも同じ速さで進むことを示したのである．

電磁波が水面を伝わる波のように，ある媒質を伝わるものであるとすれば，それはマクスウェルの方程式自身がその媒質に対して静止した座標系でのみ成り立つことを意味する．媒質に対して動く座標系では，方程式はその解である電磁波の速さが向きによるような形に変わらなければならない．マイケルソン-モーレーの実験は，マクスウェルの方程式が動く座標系でもそのまま成り立つことを示し，同時に静止した媒質の存在を否定したのである．6-3節で見たように，動く座標系に移ればそれに伴い電場と磁場はある変換を受ける．その変換された電磁場に対してマクスウェルの方程式がそのまま成り立つと考えなければならない．すなわち，マクスウェルの方程式は「相対性原理」(7-2節)を満たしている．こうして，マクスウェルの電磁気学からアインシュタインの相対性理論へと，道は続いている。

20世紀における物理学のもうひとつの発展，量子力学の誕生へ向けて道を開いたのも，電磁場の問題であった．私たちは，高温に熱した物体が光を発し，温度が高くなるとともに光の色は赤から青白色に変わることを知っている．物体の温度が高いことは，物体を構成する分子の熱運動が激しいことを意味する．統計力学によると，分子の熱運動の平均エネルギーは絶対温度 T に比例し，1分子当り $k_{\mathrm{B}}T$ の程度である．比例係数 k_{B} をボルツマンの定数といい，その大きさは

$$k_{\mathrm{B}} = 1.380\times10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$$

である．熱運動によって電子やイオンなどの荷電粒子も振動するから，電磁波が放射される．高温になるほど熱運動が激しいから，放射される電磁波も強い．これが高温の物体による熱放射である．

この熱放射の性質を知るために，四方を壁に囲まれた空洞内にどのような電磁場が生じるかを考えてみよう．壁の物質中では荷電粒子が乱雑な熱運動をし

ているので，空洞内にはいろいろな振動数の電磁場が乱雑に生じると考えられる．温度を一定に保った水に物体を浸してしばらくおくと，物体は水と同じ温度になる．これと同じように，壁を温度 T にしておけば，空洞の電磁場の振動も同じ温度 T の状態になるであろう．真空の温度というと不思議に感じるかも知れないが，電磁場は物質と同様にエネルギーをもつのだから，その温度を考えることもできる．統計力学によれば，電磁場の振動をいろいろな振動数の成分に分けて考えると，温度 T のとき各成分の平均エネルギーは，振動数によらず，物質分子の場合と同様 k_BT の程度になる．物質の場合には，分子数を N とすれば，全エネルギーは Nk_BT の程度，したがって比熱は Nk_B の程度になる．分子数は多いとはいえ有限であるから，もちろん比熱も有限な値になる．ところが電磁場では，高い振動数の成分が可視光から紫外線，X 線と限りなく存在する．成分の数が無限だから比熱も無限大になってしまう．これでは電磁場は底なし沼のようなもので，壁からいくらエネルギーが供給されても壁と同じ温度に達することができない．

実際にはこのようなことにならない．壁に小さな孔を開けて観測すると，空洞から洩れてくる光は壁の温度により一定の色あいと強さをもっていて，空洞内の電磁場が温度 T の状態にあることを示している．それに，電磁場のどの成分もその振動数によらず同じ大きさの平均エネルギー k_BT をもつとすれば，高温になるほど光が青白くなり，高い振動数の成分が強くなることの説明がつかない．

熱放射の問題におけるこの困難を解決するため，1900 年，プランク(M. Planck)は新しい仮説を提唱した．それは，振動数 ν で振動する電磁場の成分は，そのエネルギーとして $h\nu$ の整数倍の値しかとりえない，とするものであった．定数 h をプランクの定数といい，その大きさは

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$$

である．私たちがこの本で学んだ電磁気学では，電磁場のエネルギーは場の強さの 2 乗に比例し，連続的にどのような値でもとることができる．プランクの仮説はこうした古典電磁気学の常識にまったく反するものであった．しかし，

プランクの仮説を認めるなら，振動数 ν の成分がとりうるエネルギーは最低 $h\nu$ だから，$k_BT<h\nu$ であればその成分の電磁場はほとんど生じえない．それによって比熱が無限大になる困難も解決し，熱放射の温度変化も見事に説明がつくのである．

プランクの仮説は，振動数 ν の電磁波がエネルギー $h\nu$ の粒子の集団のように振舞うことを意味する．この粒子はフォトン(photon)と呼ばれる．こうした運動の不連続性は，電磁場だけでなく物質を構成するミクロな粒子にも存在することが明らかになり，1920年代にはミクロな世界の物理法則として量子力学が成立するにいたった．量子力学に基づく電磁場の理論は，量子電気力学(quantum electrodynamics)として完成した．それはさらに一般的な場の量子論へとすすみ，湯川秀樹の中間子論へつづくのである．

私たちは9章と10章で物質中の電磁場の問題を扱った．そのとき，物質を構成する原子や分子がどのように電磁場の影響を受けるかを知る必要があった．私たちはそこで古典論的なモデルや現象論を用いて物質中で電磁場のしたがう方程式を導いたのであるが，原子や分子は本来量子力学にしたがって運動する．したがって，分子の分極率や磁性体の磁化率を求めるには，量子力学に基づく議論をしなければならない．とくに物質の磁性については量子力学の効果が基本的に重要である(306ページのコーヒー・ブレイク「磁性と量子論」参照)．量子力学に基づいてミクロな立場から物質の性質を研究する物理学の分野は，物性物理学と呼ばれ，量子力学の成立後，とくに第2次大戦後急速な発展をとげた．現在では，固体エレクトロニクスなどの種々の応用とも結びついて，現代物理学の重要な一分野となっている．

本書では，入門書として電磁気学のもっとも基本的な部分を，少ないページ数の中で学ぶことを目指した．ある意味でこれと対照的な入門書に，

[1] E. M. Purcell: *Electricity and Magnetism* (Berkeley Physics Course vol. 2), McGraw-Hill (1963) (飯田修一監訳：『電磁気』(上・下) (バークレー物理学コース2)，丸善(1970, 71))

がある．この本は取り扱っている事柄の範囲，難易度は本書とほぼ同じだが，

はるかに多くのページ数を用いて，基本的なことについて詳しく，ていねいに説明がなされている．本書では深入りすることを避けた基本的な事柄，たとえば電荷の保存則，クーロンの法則で力が距離の2乗に反比例するというのはどこまで正しいか，といった問題が詳しく論じられており，学ぶべきことが多い．原書では本書とは異なる単位系が使われているが，訳書にはMKSA単位系による式も同時に示されている．この本は同じBerkeley Physics Courseの第1巻で相対性理論を学んだことを前提にして書かれている．しかし，相対性理論の知識が必要になるのはほんの一部分だけであるから，それを知らないことが読む上の支障になることはほとんどない．

理論的な面で本書を補足してくれる本として，

[2]　砂川重信：『電磁気学』(岩波全書)，岩波書店(1977)

をあげたい．この本は小さな本であるが，わかり易く簡潔にまとめられている．しかも本書では扱いきれなかった問題，たとえば荷電粒子と電磁場の相互作用，荷電粒子の運動による電磁波の放射の問題なども詳しく論じられている．それだけに，数学的な面で本書より難しい．

豊富な応用例を学ぶには，

[3]　高橋秀俊：『電磁気学』(物理学選書3)，裳華房(1959)

が優れている．直流回路，交流回路，立体回路などの回路の問題に多くのページをさいているのがこの本の特徴である．用いている単位は本書と異なるが，本書の式と対比させて読みすすめば混乱を避けることができよう．本書や[1]と比べて程度が高く，[2]に比べて分量も多いので，通読するには相当な努力が必要だが，著者の優れた見解が随所にもられたユニークな本であり，得るところが多いと思う．

電磁気学の完成につづく物理学の発展，相対性理論や量子論については，この入門コースの『相対性理論』，『量子力学 I, II』によって学んでいただきたい．

問題略解

7-3 節

1. ひと巻きのコイルに生じる起電力は，例題 1 の結果により $\cos(\omega t+\theta_0)=\pm 1$ のとき最大で，その大きさは $BS\omega$. $B=5\times 10^{-5}$ T, $S=\pi\times(0.05)^2$ m^2, $\omega=2\pi\times 15$ s^{-1} とし，2000 倍して $\phi=7.4\times 10^{-2}$ V.

2. 導線からの距離が r の点における磁束密度は $\mu_0 I/2\pi r$ ((6.11)式). 回路がかこむ面内における磁束密度の空間変化を無視すれば，回路を貫く磁束は $\Phi(t)=\mu_0 IS/2\pi r(t)$. 誘導起電力は

$$\phi_{\mathrm{em}}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0 ISv}{2\pi r^2}$$

3. (1)時刻 $t=0$ における回路の面積を S_0 とすれば，時刻 t における面積は $S(t)=S_0+avt$. 回路を貫く磁束は $\Phi(t)=BS_0+Bavt$. したがって，回路に生じる誘導起電力は $\phi_{\mathrm{em}}(t)=-d\Phi/dt=-Bav$. 電流の大きさ I，ジュール熱 J は

$$I = \frac{|\phi_{\mathrm{em}}|}{R} = \frac{Bav}{R}, \qquad J = I^2 R = \frac{(Bav)^2}{R}$$

(2)電流にはたらく力は単位長さ当り IB. 棒にはたらく力は,

$$F = IBa = \frac{(Ba)^2 v}{R}$$

単位時間当りの仕事は

$$W = Fv = \frac{(Bav)^2}{R}\ (=J)$$

7-4 節

1. ソレノイドの巻き数を n，電流を I とすれば，内部の磁束密度は軸に平行で，大きさは $B=\mu_0 nI$ となる((6.41)式)．$dI/dt=$一定とすれば，$dB/dt=\mu_0 n\cdot dI/dt=$一定．円筒の内部を一様に流れる電流による磁場は，6-9 節問題 2 で求めた．$\mu_0\to -1$，$I/\pi a^2 \to \mu_0 n\cdot dI/dt$ と置き換え，誘導電場は

$$E(r)=\begin{cases} -\dfrac{\mu_0 n}{2}\dfrac{dI}{dt}\cdot r & (r<a) \\ -\dfrac{\mu_0 n}{2}\dfrac{dI}{dt}\dfrac{a^2}{r} & (r>a) \end{cases}$$

7-5 節

1. (7.20)で $n=2000\div 0.2\ \mathrm{m^{-1}}$，$l=0.2\ \mathrm{m}$，$S=\pi\times 0.025^2\ \mathrm{m^2}$ とおき $L=0.049\ \mathrm{H}$.

2. コイルに生じる誘導起電力は $-LdI(t)/dt$．したがって，$LdI(t)/dt+RI(t)=0$．初期条件 $I(0)=I$ のもとで解くと，$I(t)=Ie^{-(R/L)t}$.

3. (1)円筒の軸に垂直な平面内の，軸を中心とする半径 r の円にアンペールの法則(6.37)を適用する．軸からの距離 r の点における磁束密度の大きさを $B(r)$ とすれば，左辺の積分は $2\pi rB(r)$．右辺は $r<a_1$，$r>a_2$ のとき 0，$a_1<r<a_2$ のとき $\mu_0 I$．したがって，磁場は $a_1<r<a_2$ の領域にのみ存在し，その大きさは $B(r)=\mu_0 I/2\pi r$．向きは，円に沿って円筒のまわりを回転する向き.

(2)回路を貫く磁束は

$$\Phi = l\int_{a_1}^{a_2} B(r)dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_{a_1}^{a_2}\frac{dr}{r}$$
$$= \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

したがって，(7.16)により自己インダクタンスは

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

7-6 節

1. 半径 a_1 のコイルに電流 I を流したとき，半径 a_2 のコイルの位置に生じる磁束密度は，(6.18)により $B=(\mu_0 I/2)\cdot a_1{}^2/(R^2+a_1{}^2)^{3/2}\cong(\mu_0 I/2)\cdot a_1{}^2/R^3$．半径 a_2 の円内における磁束密度の空間変化を無視すると，半径 a_2 のコイルを貫く磁束は

$$\Phi = \pi a_2{}^2 B = \frac{\pi\mu_0 a_1{}^2 a_2{}^2}{2R^3} I$$

したがって，相互インダクタンスは $M=\pi\mu_0 a_1{}^2 a_2{}^2/2R^3$.

7-8 節

1. コイルの磁場のエネルギーは $(1/2)LI^2=0.5$ J．コンデンサーのエネルギーは $U=q^2/2C$．$U=0.5$ J，$C=10^{-7}$ F として，$q=3.2\times10^{-4}$ C.

2. $R\int_0^\infty I(t)^2 dt = RI^2\int_0^\infty e^{-(2R/L)t}dt = \frac{1}{2}LI^2$.

3. $a_1<r<a_2$ の領域で $B(r)=\mu_0 I/2\pi r$ だから

$$U = \frac{l}{2\mu_0}\int_{a_1}^{a_2} B(r)^2\cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi}\int_{a_1}^{a_2}\frac{dr}{r}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\mu_0 l}{2\pi}\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\cdot I^2$$

$L=(\mu_0 l/2\pi)\log(a_2/a_1)$．したがって $U=(1/2)LI^2$ に一致する.

4. (2) $\phi_1=-d\Phi_1/dt=-MdI/dt$，$\phi_2=-d\Phi_2/dt=-L_2 dI/dt$.

(3) $U_2=-\int_0^T \phi_2 I dt = L_2\int_0^T \frac{dI}{dt}Idt = \frac{1}{2}L_2\int_0^T\frac{dI^2}{dt}dt = \frac{1}{2}L_2 I_2{}^2$．$(I(T)=I_2.)$

(4) $U_3=-\int_0^T \phi_1 I_1 dt = MI_1\int_0^T\frac{dI}{dt}dt = MI_1 I_2$.

全部を合計して $U=U_1+U_2+U_3=L_1I_1{}^2/2+MI_1I_2+L_2I_2{}^2/2$.

7-9 節

1. (7.32)式で $L=0$，$\phi(t)=0$ とし，(7.33)の関係を用いると $RdQ(t)/dt+(1/C)Q(t)=0$．$Q(0)=Q$ の初期条件で解くと，$Q(t)=Qe^{-t/RC}$．電流は $I(t)=dQ(t)/dt=-(Q/R\cdot C)e^{-t/RC}$．発生するジュール熱は

$$R\int_0^\infty I(t)^2 dt = \frac{Q^2}{RC^2}\int_0^\infty e^{-2t/RC}dt = \frac{Q^2}{RC^2}\left[-\frac{RC}{2}e^{-2t/RC}\right]_0^\infty = \frac{Q^2}{2C}$$

これは，はじめのコンデンサーに蓄えられていたエネルギー((4.32)式)に等しい．$C=0.1\ \mu\text{F}=10^{-7}$ F，$R=10^5\ \Omega$ のとき，$RC=10^{-2}$ s．この場合には 0.01 秒の程度で電荷は消える.

2. (7.32)式において，$R=0$, $\phi(t)=0$ とおき，(7.33)の関係を用いると，$Ld^2Q(t)/dt^2+(1/C)Q(t)=0$．$Q(0)=Q$，$[dQ(t)/dt]_{t=0}=0$ の初期条件のもとで解くと，

$$Q(t) = Q\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right), \qquad I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

コンデンサーのエネルギー U_C，コイルのエネルギー U_L はそれぞれ

$$U_C = \frac{Q(t)^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right), \qquad U_L = \frac{1}{2}LI(t)^2 = \frac{Q^2}{2C}\sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$U_C+U_L=Q^2/2C$ (＝一定)の関係が成り立つ．$C=10^{-7}$ F，$L=1$ H のとき，角振動数 $\omega=(LC)^{-1/2}\cong 3.2\times10^3\ \mathrm{s}^{-1}$.

7-10 節

1. (7.32)式で $\phi(t)=0$ とおき，(7.33)を用いて

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t) = 0$$

$Q(0)=Q$，$[dQ(t)/dt]_{t=0}=0$ の初期条件で解く．$Q(t)=Ae^{\alpha t}$ とおくと，

$$\left(L\alpha^2+R\alpha+\frac{1}{C}\right)A = 0, \qquad \alpha = \frac{1}{2L}\{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}\}$$

2根を α_1, α_2 と書くと，独立な2つの解として $e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}$ を得る．一般解は $Q(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$．初期条件により，$A_1+A_2=Q$，$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2=0$．これを解いて，$A_1=-\alpha_2Q/(\alpha_1-\alpha_2)$，$A_2=\alpha_1Q/(\alpha_1-\alpha_2)$ を得る．したがって，

$$Q(t) = -\frac{Q}{\alpha_1-\alpha_2}(\alpha_2e^{\alpha_1 t}-\alpha_1e^{\alpha_2 t})$$

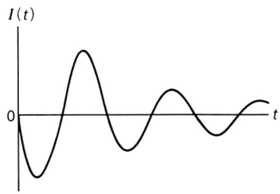
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{\alpha_1 t}-e^{\alpha_2 t})$$

(i) $R^2>4L/C$ のとき，2根とも実数で負になり，電流は単調に減衰する．

(ii) $R^2<4L/C$ のとき，2根は複素数になる．

$$I(t) = -\frac{2Q}{C\sqrt{4L/C-R^2}}e^{-(R/2L)t}\times \sin\left(\frac{\sqrt{4L/C-R^2}}{2L}t\right)$$

電流は振動しながら減衰する(図)．



8-2 節

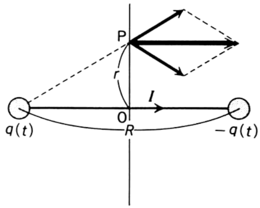
1. $E(t)=E_0\cos\omega t$ とすれば，変位電流密度は $i_{\mathrm{d}}(t)=-\varepsilon_0E_0\omega\sin\omega t$．したがってその

最大値は $\varepsilon_0 E_0\omega$. (a) $5.6\times10^{-11}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$, (b) $5.6\times10^{10}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$.

2. 電場が $E(t)=E_0\cos\omega t$ のとき，伝導電流は $i(t)=\sigma E_0\cos\omega t$，変位電流は $i_\mathrm{d}(t)=-\varepsilon_0 E_0\omega\sin\omega t$. 最大値の比は $\varepsilon_0\omega/\sigma$.

銅では $\sigma\cong6\times10^7\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. $\omega=2\pi\times50\ \mathrm{s}^{-1}$ のとき $\varepsilon_0\omega/\sigma\cong5\times10^{-17}$, $\omega=2\pi\times10^{10}\ \mathrm{s}^{-1}$ のとき $\varepsilon_0\omega/\sigma\cong9.3\times10^{-9}$. ガラスでは $\sigma\cong10^{-15}\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. $\omega=2\pi\times50\ \mathrm{s}^{-1}$ のとき $\varepsilon_0\omega/\sigma\cong3\times10^5$, $\omega=2\pi\times10^{10}\ \mathrm{s}^{-1}$ のとき $\varepsilon_0\omega/\sigma=6\times10^{14}$.

3. 図のように，平面上で電場は平面に垂直になる．導体球の中心間の距離を R とすれば，導体球を結ぶ直線からの距離が r の点Pにおける電場の大きさは，導体球上の電荷を点電荷と見なし，



$$E(r,t)=\frac{q(t)R}{4\pi\varepsilon_0[(R/2)^2+r^2]^{3/2}}$$

したがって変位電流は

$$i_\mathrm{d}(r,t)=\frac{R}{4\pi[(R/2)^2+r^2]^{3/2}}\frac{dq(t)}{dt}$$

平面上の，直線との交点Oを中心とする半径 r の円にマクスウェル-アンペールの法則を適用する．磁場は円に沿った向きに生じるから，磁束密度の大きさを $B(r,t)$ とすれば，針金に流れる電流を $I(t)$ として

$$\begin{aligned}2\pi rB(r,t)&=\mu_0 I(t)+\mu_0\int_0^r i_\mathrm{d}(r',t)\cdot2\pi r'dr'\\&=-\mu_0\frac{dq(t)}{dt}+\frac{\mu_0R}{2}\frac{dq(t)}{dt}\int_0^r\frac{r'dr'}{[(R/2)^2+r'^2]^{3/2}}\\&=-\mu_0\frac{dq(t)}{dt}+\frac{\mu_0R}{2}\frac{dq(t)}{dt}\left[-\frac{1}{[(R/2)^2+r'^2]^{1/2}}\right]_0^r\\&=-\frac{\mu_0R}{2\sqrt{(R/2)^2+r^2}}\frac{dq(t)}{dt}\end{aligned}$$

$$B(r,t)=\frac{\mu_0R}{4\pi r\sqrt{(R/2)^2+r^2}}\left\{-\frac{dq(t)}{dt}\right\}$$

8-3 節

1. (8.15)～(8.18)で $\rho=0$, $\boldsymbol{i}=0$ とおき，$\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{A}/\partial t$, $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ を代入すれば

$$-\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=0 \tag{1}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0 \tag{3}$$

$$-\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{4}$$

(2),(4)は自動的に満たされる．$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ のとき(1)は満たされる．ベクトル演算の公式(6.50)により $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\nabla^2\boldsymbol{A}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\nabla^2\boldsymbol{A}$．従って(3)は $\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon_0\mu_0\partial^2\boldsymbol{A}/\partial t^2=0$.

8-4 節

1. 極板の面積を A，極板上の電荷を $Q(t)$ とすれば，電場は $E(t)=Q(t)/\varepsilon_0 A$．磁束密度は中心軸から距離 r の点で $B(r,t)=-\mu_0\{dQ(t)/dt\}r/2A$．電場と磁束密度の向きは垂直で，ポインティング・ベクトルは中心軸から放射状に生じる．その大きさは

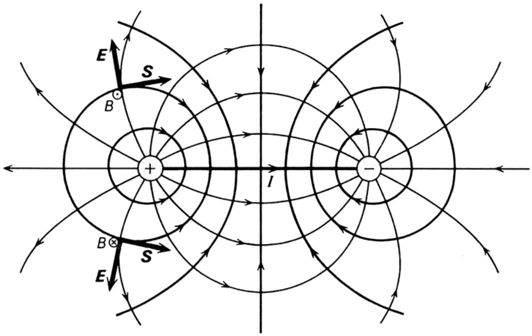
$$S(r,t)=\frac{1}{\mu_0}E(t)B(r,t)=-\frac{r}{2\varepsilon_0 A^2}Q(t)\frac{dQ(t)}{dt}=-\frac{r}{4\varepsilon_0 A^2}\frac{dQ(t)^2}{dt}$$

極板の端 $r=R$ を流れだす全エネルギーは，極板の間隔を d として

$$2\pi Rd\int_0^\infty S(R,t)dt=-\frac{\pi R^2 d}{2\varepsilon_0 A^2}\int_0^\infty \frac{dQ(t)^2}{dt}dt=\frac{dQ^2}{2\varepsilon_0 A}$$

$\varepsilon_0 A/d=C$ はコンデンサーの容量だから，流出するエネルギーはコンデンサーに蓄えられていたエネルギー $Q^2/2C$ ((4.32)式)に等しい．

2. 対称性から，磁場は導体球を結ぶ直線を軸にして，そのまわりを回転する向きに生じる．したがって，平面に垂直で，図の上下で逆向きになる．ポインティング・ベクトルは電場に垂直に図のように生じる．空間に分布していた電磁場のエネルギーが，導線に向って流れ込み，そこでジュール熱に変わる．



8–5 節

1. $B_0=E_0/c$. $E_0=0.1\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ のとき $B_0=3.3\times10^{-10}\,\mathrm{T}$. ポインティング・ベクトルの振幅は $S_0=E_0B_0/\mu_0=2.6\times10^{-5}\,\mathrm{J/m^2\cdot s}$.

2. 磁場は y 方向にそれぞれ $B_1(z,t)=B_0\cos(kz-\omega t)$, $B_2(z,t)=-B_0\cos(kz+\omega t)$. ただし，$B_0=E_0/c$. 重ね合わせによって生じる電場および磁場は

$$E(z,t)=E_1(z,t)+E_2(z,t)=2E_0\cos kz\cdot\cos\omega t$$

$$B(z,t)=B_1(z,t)+B_2(z,t)=2B_0\sin kz\cdot\sin\omega t$$

電場と磁場は，腹(振幅が最大の点)と節(振幅が 0 の点)の位置が入れかわった定常波になる.

9–1 節

1. (1)負電荷の中心から距離 u の点における電場は，(2.18)において $\rho=-q/(4\pi a^3/3)$, $|\boldsymbol{r}|=u$ とおいて $E=qu/4\pi\varepsilon_0a^3$. 点電荷にはたらく力の向きは負電荷の中心に向かい，大きさは $F=(q^2/4\pi\varepsilon_0a^3)u$.

(2) qE と F のつりあいから $u=(4\pi\varepsilon_0a^3/q)E$.

(3) $p=qu=\alpha E$ とおいて $\alpha=4\pi\varepsilon_0a^3$.

2. 酸素原子の中心に $-q$, 水素原子の中心に各 $q/2$ の電荷があるとすれば，電気双極子モーメントの大きさは $p=q\times(0.96\times10^{-10})\cos(105°/2)=(0.58\times10^{-10})q=6.14\times10^{-30}$ C·m. したがって $q=1.06\times10^{-19}$ C　水素原子は電子 1 個をもち，その電荷は 1.60×10^{-19} C. $(1.06\div2)\div1.60=0.33$, 平均で電子の 33% が酸素に移っていることになる.

9–2 節

1. (1) 2–5 節例題 3 により

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}\tag{1}$$

(2) (1)式で $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}/2$ とおいて $\boldsymbol{E}_+$, $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}/2$, ρ を $-\rho$ とおいて $\boldsymbol{E}_-$ をうる：

$$\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r})=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right),\qquad \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right)$$

(3)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{u}=-\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$

2. $p\sim5\times10^{-30}$ C·m, $U_{\mathrm{t}}\sim4\times10^{-21}$ J, $N\sim(5\times10^{-10})^{-3}\sim0.8\times10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$ とおいて，$(\varepsilon/\varepsilon_0)-1=\chi_{\mathrm{e}}/\varepsilon_0\sim10$. 固体や液体では 1～10 の大きさになる. 気体のように希薄な物質

では小さい．

9-3 節

1. コンデンサーの容量は $C=\varepsilon A/d$．$\varepsilon=2.3\varepsilon_0$，$d=10^{-4}$ m，$C=10^{-7}$ F とおいて，$A=0.49$ m^2．電位差が $\Delta\phi$ のとき，極板間に生じる電場は $E=\Delta\phi/d$．$E=2.5\times10^7$ V・m^{-1}，$d=10^{-4}$ m として $\Delta\phi=2.5\times10^3$ V．

2. 境界条件(9. 23)により，誘電体内の電場の法線成分 E_n' は $E_n'=(\varepsilon_0/\varepsilon)E\cos\theta$．誘電体表面の分極電荷密度は，分極ベクトルの法線成分に等しい．

$$\sigma_p = P_n = \varepsilon E_n' - \varepsilon_0 E_n' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon}E\cos\theta$$

3. 誘電体中の電場を $\boldsymbol{E}$，空洞中の電場を $\boldsymbol{E}'$ とする．

(a)境界条件(9. 22)により $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}$．空洞の両端に分極電荷が生じるが，空洞を十分細くすればその影響は無視できる．

(b)境界条件(9. 23)により $\varepsilon_0\boldsymbol{E}'=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}'=(\varepsilon/\varepsilon_0)\boldsymbol{E}$．空洞の両面に生じる分極電荷により，空洞内の電場は誘電体内と異なる．空洞が十分薄ければ，電場は空洞の面に垂直で，$\boldsymbol{E}'\parallel\boldsymbol{E}$ としてよい．

(c)真空中に誘電体の球がおかれた場合，誘電体の分極によって生じる電場は $-\boldsymbol{P}/3\varepsilon_0$．真空中の一様電場を $\boldsymbol{E}$ とすれば，誘電体中の電場 $\boldsymbol{E}'$ は，$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}/3\varepsilon_0$．また $\varepsilon\boldsymbol{E}'=\varepsilon_0\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{P}$．$\therefore \boldsymbol{E}'=\{3\varepsilon_0/(2\varepsilon0+\varepsilon)\}\boldsymbol{E}$．誘電体中の空洞の場合は ε_0 と ε を入れかえて，$\boldsymbol{E}'=\{3\varepsilon/(2\varepsilon+\varepsilon_0)\}\boldsymbol{E}$．

9-4 節

1. 誘電体の挿入されている領域の極板の面積が A' のとき，コンデンサーに蓄えられているエネルギーは，$U=q^2d/2[\varepsilon_0A+(\varepsilon-\varepsilon_0)A']$．極板の幅を a とすれば，誘電体を Δx だけ引き出したとき，A' は $A'-a\Delta x$ になるから，エネルギーの変化は

$$\Delta U = \frac{q^2d}{2[\varepsilon_0A+(\varepsilon-\varepsilon_0)(A'-a\Delta x)]}-\frac{q^2d}{2[\varepsilon_0A+(\varepsilon-\varepsilon_0)A']}$$

$$\cong \frac{q^2da(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2[\varepsilon_0A+(\varepsilon-\varepsilon_0)A']^2}\Delta x$$

$\Delta U=F\Delta x$ より

$$F = \frac{q^2da(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2[\varepsilon_0A+(\varepsilon-\varepsilon_0)A']^2}$$

2. 誘電体球に一様な分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ が生じたとすれば，誘電体の内部にはそれに伴う電場 $-\boldsymbol{P}/3\varepsilon_0$ が生じる(9-2 節問題 1)．したがって，誘電体内部の電場は $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0-\boldsymbol{P}/3\varepsilon_0$．他方，(9.8)により $\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$．2 つの関係を解いて

$$\boldsymbol{P}=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon_0+\varepsilon}\boldsymbol{E}_0$$

球全体の双極子モーメントは

$$\boldsymbol{p}=\frac{4\pi}{3}R^3\boldsymbol{P}=\frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon_0+\varepsilon}R^3\boldsymbol{E}_0$$

導体球の双極子モーメント $\boldsymbol{p}=4\pi\varepsilon_0R^3\boldsymbol{E}_0$ (4-4 節例題 2)は，$\varepsilon\to\infty$ の極限として得られる．

9-6 節

1. $\chi_{\mathrm{m}}\cong 2Np_{\mathrm{m}}^2/U_{\mathrm{t}}$ において，$p_{\mathrm{m}}\sim10^{-29}\,\mathrm{Wb\cdot m}$，$N\sim(5\times10^{-10})^{-3}\cong0.8\times10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$，$U_{\mathrm{t}}\sim4\times10^{-21}\,\mathrm{J}$ として

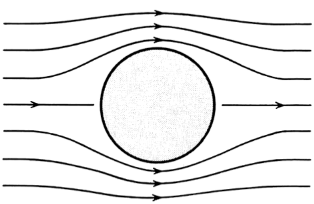
$$\frac{\mu}{\mu_0}-1=\frac{\chi_{\mathrm{m}}}{\mu_0}\cong3\times10^{-4}\ll1$$

9-7 節

1. 磁石の内部では $\boldsymbol{H}=0$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}$．したがって，境界条件(9.41)により隙間の空間でも $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}$．原子の磁気双極子モーメントがすべて一方向に揃っていれば，$\boldsymbol{M}=Np_{\mathrm{m}}$．$p_{\mathrm{m}}=1.2\times10^{-29}\,\mathrm{Wb\cdot m}$，$N=3\times10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$ とすれば，$B=M\cong0.36\,\mathrm{T}$．

2. 磁極の面積を A，間隔を x とすれば，磁場のエネルギーは $U=(B^2/2\mu_0)Ax$．$x\to x+\varDelta x$ のときのエネルギーの変化を $\varDelta U$ とすれば，磁極間にはたらく力 F は，$F\varDelta x=\varDelta U$．したがって，$F=(1/2\mu_0)B^2A$．$B=0.36\,\mathrm{T}$，$A=10^{-3}\,\mathrm{m}^2$ として，$F\cong52\,\mathrm{N}$．

3. 一般に物質の境界面で条件(9.41)が成り立つが，完全反磁性体の内部では $\boldsymbol{B}=0$ だから，真空中の磁束密度はその表面において $B_{\mathrm{n}}=0$．完全反磁性体の球があるときの磁束密度の様子は図のようになる．



10-2 節

1. 電場を $\tilde{\boldsymbol{E}}(t)=\tilde{\boldsymbol{E}}e^{i\omega t}$，電子の変位を $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)=\tilde{\boldsymbol{u}}e^{i\omega t}$ とおけば，

$$\left(-\omega^2+i\frac{\omega}{\tau}+\frac{k}{m}\right)\tilde{\boldsymbol{u}}=-\frac{e\tilde{\boldsymbol{E}}}{m}$$

$k/m=\omega_0{}^2$ とおいて

$$\tilde{\boldsymbol{u}}=-\frac{e\tilde{\boldsymbol{E}}}{m(\omega_0{}^2-\omega^2+i\omega/\tau)}$$

$\tilde{\boldsymbol{P}}=-Nze\tilde{\boldsymbol{u}}=\tilde{\chi}_e\tilde{\boldsymbol{E}}$ とおいて(10.37)が得られる.

2. 電子の分布の中心と原子核とのずれが u のとき電子にはたらく力は，9-1 節問題 1 で $q=Ze$ とおき，$F=(Z^2e^2/4\pi\varepsilon_0 a^3)u$. したがって，電子の運動方程式は

$$Zm\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}u$$

固有振動数は

$$\omega_0=\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 ma^3}\right)^{1/2}$$

$Z=6$, $a=0.7\times10^{-10}$ m, $m=9.1\times10^{-31}$ kg として，$\omega_0=6.7\times10^{16}$ s^{-1}.

3. 摩擦力を無視した誘電率の式(10.28)により

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}=1+\frac{\chi_e}{\varepsilon_0}\frac{1}{1-(\omega/\omega_0)^2}$$

ただし $\chi_e=Nze^2/m\omega_0{}^2$. $\omega=0$ のとき，$\varepsilon/\varepsilon_0=1+\chi_e/\varepsilon_0=4.5$. したがって，$\chi_e/\varepsilon_0=3.5$. $\omega/\omega_0=2.5/10$ のとき $\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0=4.7$, $\omega/\omega_0=4.5/10$ のとき $\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0=5.4$.

10-3 節

1. 屈折率は(10.45)により $n=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$. 赤い光では $n=2.16$, 青い光では $n=2.32$. 屈折の法則(10.46)により，屈折角 θ は赤い光では $\sin\theta=(1/2.16)\sin 30°$, $\theta=13.4°$. 青い光では $\sin\theta=(1/2.32)\sin 30°$, $\theta=12.4°$.

10-4 節

1. $\omega\gg\sigma/\varepsilon$ のときは，(10.60)の虚数部が小さいので，(2.10)の近似を用いて

$$\tilde{k}=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega\left(1-i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^{1/2}\cong k-ik'$$

ただし $k=\omega/c\,(c=1/\sqrt{\varepsilon\mu})$, $k'=\sqrt{\mu/\varepsilon}\,\sigma/2$. (10.58), (10.53)に代入して実数部をとれば $E(z,t)=E_0e^{-k'z}\cos(kz-\omega t)$. $k\gg k'$ なので，電磁波は物質の内部にすすむとともに，振動しながら減衰する.

2. 電場を $\tilde{\boldsymbol{E}}(t)=\tilde{\boldsymbol{E}}e^{i\omega t}$, 速度を $\tilde{\boldsymbol{v}}(t)=\tilde{\boldsymbol{v}}e^{i\omega t}$ とおけば，

$$\left(im\omega+\frac{m}{\tau}\right)\tilde{\boldsymbol{v}} = -e\tilde{\boldsymbol{E}}, \qquad \tilde{\boldsymbol{v}} = \frac{-e\tilde{\boldsymbol{E}}}{m(i\omega+1/\tau)}$$

したがって電流密度を $\tilde{\boldsymbol{i}}(t)=\tilde{\boldsymbol{i}}e^{i\omega t}$ とおいて,

$$\tilde{\boldsymbol{i}} = -ne\tilde{\boldsymbol{v}} = \frac{ne^2\tilde{\boldsymbol{E}}}{m(i\omega+1/\tau)}$$

実数に戻せば

$$\boldsymbol{i}(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{\boldsymbol{i}}e^{i\omega t} = \frac{ne^2\tau}{m}\boldsymbol{E}_0\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1-i\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}e^{i(\omega t+\alpha)}\right\}$$

$$= \frac{ne^2\tau}{m}\left\{\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t+\alpha)+\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\boldsymbol{E}_0\sin(\omega t+\alpha)\right\}$$

索引

（立体の数字は3巻『電磁気学 I』の，斜体の数字は4巻『電磁気学 II』のページ数を示す）

ア　行

アインシュタイン A. Einstein　*335*
アンペア　9, 161
アンペール A. Ampère　145
アンペールの法則
　積分形の——　173
　微分形の——　174
　物質中の——　*307*
e. s. u.　161
位相　*243, 245*
インダクタンスの単位　*228*
インピーダンス　*245*
ウェーバー（単位）　166
渦なしの法則
　積分形の——　51
　微分形の——　88
永久磁石　*302*
永久電流　*301*
エックス線　*272, 273*
エーテル　*316*
MKSA 単位系　9, 160
エールステッド H. Oersted　145
遠隔作用　22
オーム（単位）　132
オームの法則　132, 133, 138

カ　行

外積　20
回転　88
回転電流　149
ガウスの定理　81
ガウスの法則
　積分形の——　43, 70
　微分形の——　80
　物質中の——　*287*
重ね合わせの原理　8, 107, *268*
可視光　*272*
加速器　152
荷電粒子　151
雷　127
ガンマ線　*272*
起電力　126
基本ベクトル　17
キャベンディシュ H. Cavendish　9
球面波　*273*
境界条件　95, 107
　静磁場の——　*309*

静電場の—— *292*
境界値問題 107
強磁性 *302*
鏡像法 112
共鳴 *247, 319, 323*
近接作用 23
金属電子論 139
空中電気 127
空洞放射 *270*
クォーク 5
屈折の法則 *325*
グラジエント 56
クーロン C. A. Coulomb 6
クーロン（単位） 9
クーロンの法則
磁荷の—— 144
電荷の—— 7, 14, 26
原子スペクトル *276*
光速 *269*
勾配 56
交流 *240*
固有振動数 *247, 317*
コンデンサー 118
——の静電エネルギー 120
——の電気容量 119
平行板—— 119

サ 行

磁荷 144, 165, 166, *311*
磁化 *300, 306*
紫外線 *272*
磁化電流 *302, 314*
磁化電流密度 *305*
磁化ベクトル *300, 314*
磁化率 *308*
磁気双極子 145, 149, 165
磁気双極子モーメント 166
磁気単極 *257*
磁区 *301*
自己インダクタンス *228*
自己誘導 *228*
自己誘導係数 *228*
CGS 静電単位系 161
磁石 144, *311*
磁性体 *300*
磁束 *217*
磁束密度 147, 160
磁場 145
磁場の強さ 160
物質中の—— *307*
ジュール J. P. Joule 140
ジュール熱 140, *263*
準定常電流 *227, 255*
常磁性 *300*
真電荷 *287*
振動電流 *240*
振幅 *243*
スカラー 12
スカラー積 16
ストークスの定理 89
スピン *299*
静磁場 145
——のエネルギー *239*
静磁場の基本法則
真空中の—— 174
物質中の—— *308*
静電エネルギー 61
静電場 27, 68
——のエネルギー 121
静電場の基本法則
真空中の—— 71
物質中の—— *289*
静電ポテンシャル 52
正の電気 3
赤外線 *272*
絶縁体 102, *280*
接触電位差 128
接線ベクトル 48

絶対屈折率　*324*
線積分　48
相互インダクタンス　*232*
相互誘導係数　*232*
相対屈折率　*325*
相対性の原理　*220, 335*
相反定理
　相互インダクタンスの——　*232, 236*
　電気容量の——　116
素粒子　3, 5
ソレノイド　159

タ　行

体積積分　30
ダイナモ理論　155
単位ベクトル　14
短波　*272*
地球磁場　148, 155
中性子　3
中短波　*272*
中波　*272*
超短波　*272*
超伝導　*301, 302*
長波　*272*
抵抗率　132
定常電流　128
テスラ　147
電位　52
電荷　3, 9
　——の保存則　4, 131, *251*
電荷密度　28
電気感受率　*287*
　振動電場による——　*319*
電気双極子　31
　——の振動　*275*
　——の電場　33, 68
　——のポテンシャル　57, 65
電気双極子モーメント　31, 66
電気素量　3
電気抵抗　132
電気伝導度　102, 133, 138
電気分解　128
電気容量　114
　コンデンサーの——　119
電気容量係数　116
電気力線　37
電子　3
電磁気の単位　160
電磁波　23, *254, 269*
　——の減衰　*330*
　——の放射　*274*
　導体中の——　*327*
　誘電体中の——　*323*
電磁場　23
　——のエネルギー　*262*
電子ボルト　65
電磁誘導　*216*
電磁誘導の法則
　積分形の——　*225*
　微分形の——　*227*
電束　70
電束密度　70, 159
　物質中の——　*287*
電池　126
点電荷　6, 64
伝導電子　102
電場　27, 59
電離層　*331*
電流　126, 161
電流素片　156
電流密度　130
透磁率　*308, 316*
導体　102, 104, 112, 121
等ポテンシャル面　53
ドルーデ P. Drude　139

ナ　行

内積　16

ハ 行

場 23, 28, 69
波数 *267*
発散 79
波動方程式 *266, 274, 323*
波面 *273*
反磁性 *300*
ビオ-サバールの法則 157
微分演算子 56, 92
比誘電率 *288*
ファラッド 114
ファラデー M. Faraday 23, *216, 219*
ファラデー（単位） 128
フォトン *270, 337*
複素平面 *245*
不導体 102
負の電気 3
プランク M. Planck *270*
――の仮説 *336*
――の定数 *270, 336*
フーリエ級数 *268*
プリーストリー J. Priestley 9, 46
分極 *281*
分極電荷 *286, 314*
――の密度 *286*
分極電流 *314*
分極ベクトル *285, 314*
分極率 *281*
振動電場による―― *318*
分散 *326*
平行板コンデンサー 119
平面波 *273*
ベクトル 12
ベクトル積 19
ベクトル場 69
ベクトル・ポテンシャル 180
ヘルツ H. R. Hertz *254*
変位電流 *254, 255, 316*
偏微分 55
偏微分方程式 95
ヘンリー（単位） *228*
ボーア N. Bohr *277*
ポアソンの方程式 92
ポインティング J. Poynting *262*
ポインティング・ベクトル *262*
法線ベクトル 40
ポテンシャル 47, 52, 161
ボルタ A. Volta 126
ボルツマンの定数 *270, 335*
ボルト 59

マ 行

マイクロ波 *272*
マイケルソン-モーレーの実験 *335*
マクスウェル J. C. Maxwell 2, 23, *334*
マクスウェル-アンペールの法則 *254*
マクスウェルの方程式 *334*
真空中の―― *257*
物質中の―― *315*
摩擦電気 2
面積分 41

ヤ 行

誘電体 *281*
誘電率 *316*
真空の―― 10
振動電場による―― *319*
誘電体の―― *288, 323*
陽子 3

ラ 行

ラプラシアン 92
ラプラスの方程式 92
レーザー *271*
ローレンツ H. A. Lorentz 139
――の力 150, *221*

長岡洋介

1933年盛岡市に生まれる．1956年東京大学理学部卒業．1961年同大学院博士課程修了．京都大学教授，名古屋大学教授，京都大学基礎物理学研究所長，関西大学教授をへて，京都大学名誉教授，名古屋大学名誉教授．理学博士．専攻，物性理論．

著書：『遍歴する電子』(産業図書)．『極低温の世界』(岩波書店)，『局在・量子ホール効果・密度波』(共著，岩波書店)，『統計力学』(岩波書店)，その他．

電磁気学 II 〔物理入門コース 4〕

1983年1月12日 第1刷発行 ©
2012年10月5日 第39刷発行

著 者 長岡洋介（ながおかようすけ）

発行者 山口昭男

発行所 株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電話案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・理想社 カバー・精興社 製本・牧製本

ISBN 4-00-007644-2 Printed in Japan